Mechanik 1

Skript zum Physik-T-Kurs (Arbeitsfassung)

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlegende Größen und ihre Einheiten 4
1.1 Die Länge 4
1.2 Die Zeit 4
1.3 Die Masse 4
2 Die Kraft 5
2.1 Das Massepunktmodell 5
2.2 Die Ruhe 5
2.3 Die Kraft 5
2.4 Das Wechselwirkungsprinzip 6
2.5 Übungen 6
3 Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften 9
3.1 Die Zusammensetzung / die Addition von Kräften 9
3.2 Die Addition von mehr als 2 Kräften 10
3.3 Die Zerlegung von Kräften 10
3.4 Übungen 12
4 Das Interpretieren von Gleichungen 15
4.1 Fünf Fragen an eine Gleichung 15
4.2 Übungen 16
5 Das statische Gleichgewicht 18
5.1 Übungen 18
6 Grundlegende Größen der Kinematik 21
6.1 Grundlegende Größen 21
7 Bewegungsarten 24
8 Bezugssysteme 25
8.1 Übungen 25
9 Die geradlinige gleichförmige Bewegung 26
9.1 Die Bewegungsgleichungen der geradlinigen gleichförmigen Bewegung 26
9.2 Das Zeit-Weg-Diagramm / das s(t)-Diagramm 27
9.3 Das Zeit-Geschwindigkeit-Diagramm / das v(t)-Diagramm 27
9.4 Das Zeit-Beschleunigungs-Diagramm / das a(t)-Diagramm 27
9.5 Übungen 27
10 Die geradlinige gleichmäßig beschleunigte Bewegung 30
10.1 Herleitung der Bewegungsgleichungen 30
10.2 Das Zeit-Weg-Diagramm der gleichmäßig beschleunigten geradlinigen Bewegung 31
10.3 Das Zeit-Geschwindigkeit-Diagramm 31
10.4 Das Zeit-Beschleunigungs-Diagramm 32
10.5 Übungen 32
10.6 Übungsaufgaben zu Bewegungsdiagrammen 33
11 Der freie Fall 36
11.1 Die Bewegungsgleichungen des freien Falls 36
11.2 Beispiel 36
11.3 Übungen 37
12 Zusammengesetzte Bewegungen 39
12.1 Das Relativitätsprinzip 39
12.2 Das Unabhängigkeitsprinzip / das Superpositionsprinzip 40
12.3 Übungen 40

13 Wurfbewegungen 42
13.1 Der waagerechte Wurf 42
13.2 Der senkrechte Wurf 42
13.3 Der schiefe Wurf / der schräge Wurf 43
13.4 Übungen 45
13.5 Weitere Übungsaufgaben 47
14 Die Newtonschen Axiome 51
14.1 Die Newtonschen Axiome 51
14.2 Übungen 51
15 Kräfte bei Bremsvorgängen 55
16 Reibungskräfte 56
16.1 Wie entsteht Reibung? 56
16.2 Wie kann man Reibung vermeiden? 56
16.3 Arten der Reibung 56
16.4 Die Haftreibung 56
16.5 Die Gleitreibungskraft 57
16.6 Die Rollreibungskraft 57
16.7 Beispielaufgabe und Übungen 58
16.8 Der Luftwiderstand / die Luftreibung 63
16.9 Übungsaufgaben zur Luftreibung 64
Klausurvorbereitung 1 66
Begriffe, die Sie definieren / erklären müssen 66
Aufgaben zur Kinematik 66
Aufgaben zu Kräften und zur Dynamik 70
17 Die gleichförmige Kreisbewegung 75
17.1 Die Herleitung der Gleichung zur Berechnung der Zentripetalkraft 75
17.2 Die Winkelgrößen der gleichförmigen Kreisbewegung 76
17.3 Einige Beispiele für Kreisbewegungen mit ihren Zentripetalkräften 77
17.4 Übungen 77
18 Trägheitskräfte und die Zentrifugalkraft 79
18.1 Trägheitskräfte und „erfahrene Schwerkraft“ 79
18.2 Die Zentrifugalkraft 79
18.3 Übungen 80
19 Energie, Arbeit und Leistung 84
19.1 Energie 84
19.2 Arbeit 84
19.3 Leistung 85
20 Potenzielle Energie und Hubarbeit 86
20.1 Herleitung der Gleichung 86
20.2 Beispielaufgabe 86
21 Die Spannenergie einer Feder und die Dehnungsarbeit 88
22 Die kinetische Energie und die Beschleunigungsarbeit 90
23 Die Reibungsarbeit 91
23.1 Übungen zu Arbeit 91
24 Der Energieerhaltungssatz und Systeme 94
24.1 Der Energieerhaltungssatz 94
24.2 Systeme 94
24.3 Beispielaufgabe 95
24.4 Übungen 97
25 Der Wirkungsgrad 100
25.1 Perpetuum mobile 100
25.2 Übungsaufgaben Energie mit Reibung 101
26 Der Impuls 105

26.1 Der Impulserhaltungssatz 105
26.2 Übungen 106
27 Der Kraftstoß 109
27.1 Was ist ein Stoß? 109
27.2 Übungen 109
28 Systeme mit veränderlicher Masse: Eine Rakete 116
28.1 Berechnung der Beschleunigung einer Rakete 116
28.2 Berechnung der Geschwindigkeit der Rakete 117
28.3 Übung 117
29 Stoßvorgänge 119
29.1 Was ist ein Stoßvorgang / ein Stoß? 119
29.2 Arten des zentralen Stoßes 119
29.3 Beispielaufgabe zum vollkommen unelastischen Stoß 120
29.4 Übungsaufgaben Stoßvorgänge 121
30 Der zentrale elastische Stoß 123
Klausurvorbereitung 2 124
Winkelgrößen der Kreisbewegung 124
Aufgaben zur Kreisbewegung 124
Aufgaben zu Arbeit und Energie 128
Aufgaben zu Impuls und Stoßvorgängen 132

1 Grundlegende Größen und ihre Einheiten

1.1 Die Länge

→ Die Länge oder Längen werden in Metern gemessen.

Was ist ein Meter?

- ursprünglich: $\frac{1}{10\,000\,000}$ des Abstands Nordpol ↔ Äquator
- jetzt: der Weg, den Licht in $\frac{1}{299\,792\,458}$ Sekunde zurücklegt.

Vielfache und Teile des Meters:

- $1000\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{km}$ (1 Kilometer)
- $1\,000\,000\,000\,\mathrm{m} = 1 \cdot 10^9\,\mathrm{m}$
- $0{,}01\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{cm}$ (1 Zentimeter)
- $0{,}001\,\mathrm{m} = 10^{-3}\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{mm}$ (1 Millimeter)

1.2 Die Zeit

- Die Standardeinheit der Zeit ist die Sekunde.

→ Eine Sekunde ist definiert als die Dauer von 9 192 631 770 Schwingungen der Strahlung, die ein Cäsium-133-Atom aussendet.

1.3 Die Masse

- Die Standardeinheit der Masse ist das Kilogramm (kg).

→ Die Masse wird im Kapitel „Die Newtonschen Axiome“ eingeführt.

2 Die Kraft

Die Statik beschäftigt sich mit den Wirkungen von Kräften und Gleichgewichtsbedingungen von ruhenden Körpern.

2.1 Das Massepunktmodell

- Wir vereinfachen physikalische Zusammenhänge, indem wir annehmen, dass Körper keine Ausdehnung haben und ihre Masse in einem Punkt konzentriert ist.

2.2 Die Ruhe

- Ein Körper befindet sich in Ruhe / ein Körper ruht, wenn er sich nicht bewegt.

2.3 Die Kraft

- Die Wirkung von Kräften:

  → die Bewegung eines Körpers verändern

  → Körper verformen

> Kräfte sind die Ursache für die Verformung oder die Bewegungsänderung von Körpern.

- Die Kraft ist eine vektorielle Größe.
- Das Formelzeichen der Kraft ist $\vec{F}$ (engl.: force).
- Die Einheit der Kraft heißt Newton.

$$[F] = 1\,\mathrm{N} = 1\,\mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

- Vektorielle Größen werden mit einem Pfeil dargestellt (der Vektor).

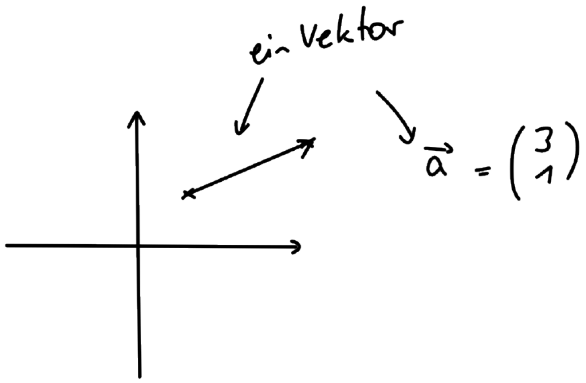


Abbildung 1: Ein Vektor im Koordinatensystem

→ Die Richtung des Pfeils gibt die Richtung der Kraft an.

→ Die Länge des Pfeils gibt die Stärke der Kraft an.

→ Der Pfeil beginnt am Angriffspunkt der Kraft. In der Mechanik 1: der Massepunkt

- Die Länge des Vektors wird der Betrag des Vektors genannt.

Man unterscheidet in Formeln:

Schreibweise	Bedeutung	
$\vec{F}$ (der Vektorpfeil)	der Kraftvektor	Richtung und Stärke werden berechnet.
$\left\vert\vec{F}\right\vert = F$ (kein Vektorpfeil)	der Betrag der Kraft	Nur die Stärke wird berechnet.

2.4 Das Wechselwirkungsprinzip

→ Kräfte treten immer in Paaren auf.

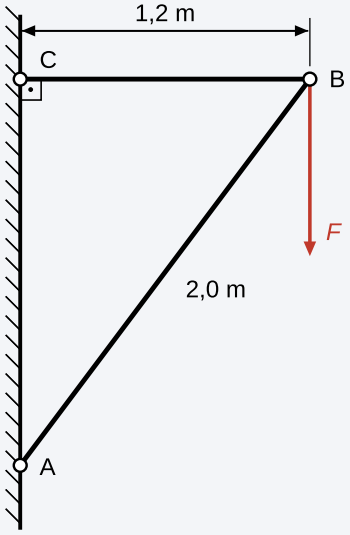
→ Wenn ein Körper A eine Kraft auf einen anderen Körper B ausübt, dann übt der zweite Körper B automatisch eine gleich große, aber entgegengesetzte Kraft auf A aus.

$$\vec{F}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} = -\vec{F}_{\mathrm{B}\to\mathrm{A}}$$

2.5 Übungen

Übungsaufgabe 1

An einer Wand ist ein rechtwinkliger Ausleger ABC befestigt. Der Stab BC verläuft waagerecht und ist 1,2 m lang, der Stab AB ist 2,0 m lang. Im Punkt B wirkt eine Kraft F von 2,4 kN senkrecht nach unten.



Bestimmen Sie zeichnerisch

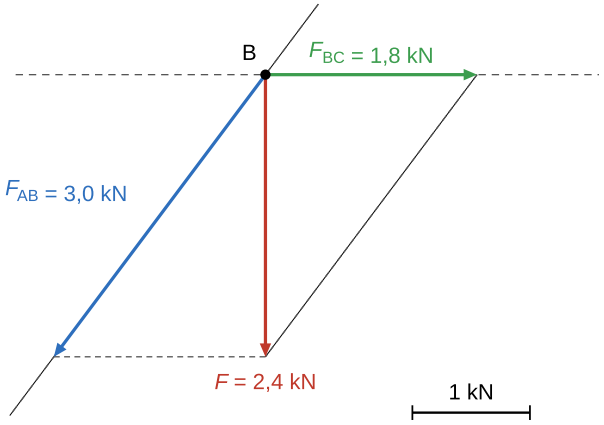
1. den Betrag F_{BC} der Zugkraft, die auf den Stab BC wirkt,
2. den Betrag F_{AB} der Druckkraft, die auf den Stab AB wirkt.

Lösung zu Übungsaufgabe 1

geg.: $F = 2{,}4\,\mathrm{kN}$, $\overline{\mathrm{AB}} = 2{,}0\,\mathrm{m}$, $\overline{\mathrm{BC}} = 1{,}2\,\mathrm{m}$

ges.: F_{BC}, F_{AB}

Lös.: Die Kraft F wird im Punkt B in die Richtungen der beiden Stäbe zerlegt (Kräfteparallelogramm). Maßstab: 1 cm ≙ 0,5 kN, der Pfeil für F ist dann 4,8 cm lang.



Aus der Zeichnung liest man ab:

$$F_{\mathrm{BC}} = 1{,}8\,\mathrm{kN} \qquad F_{\mathrm{AB}} = 3{,}0\,\mathrm{kN}$$

Rechnerische Kontrolle: Das Kräftedreieck ist dem Dreieck ABC ähnlich. Mit

$$\overline{\mathrm{AC}} = \sqrt{\overline{\mathrm{AB}}^2 - \overline{\mathrm{BC}}^2} = \sqrt{(2{,}0\,\mathrm{m})^2 - (1{,}2\,\mathrm{m})^2} = 1{,}6\,\mathrm{m}$$

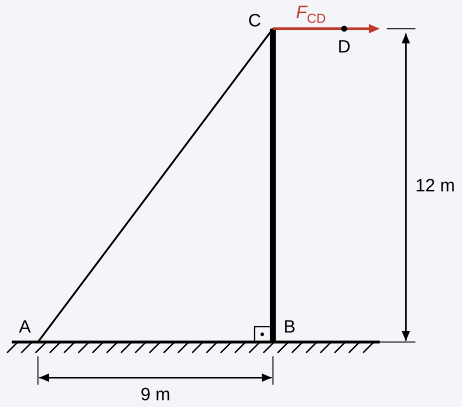
gilt:

$$\frac{F_{\mathrm{BC}}}{F} = \frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AC}}} \quad \rightarrow \quad F_{\mathrm{BC}} = F \cdot \frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AC}}} = 2{,}4\,\mathrm{kN} \cdot \frac{1{,}2\,\mathrm{m}}{1{,}6\,\mathrm{m}} = 1{,}8\,\mathrm{kN}$$

$$\frac{F_{\mathrm{AB}}}{F} = \frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{AC}}} \quad \rightarrow \quad F_{\mathrm{AB}} = F \cdot \frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{AC}}} = 2{,}4\,\mathrm{kN} \cdot \frac{2{,}0\,\mathrm{m}}{1{,}6\,\mathrm{m}} = 3{,}0\,\mathrm{kN}$$

Übungsaufgabe 2

Ein 12 m hoher Mast BC wird an seinem oberen Ende C durch ein waagerechtes Seil mit der Seilkraft $F_{\mathrm{CD}} = 15\,\mathrm{kN}$ belastet. Der Mast ist durch das Seil AC am Boden verankert. Die Punkte A und B sind 9 m voneinander entfernt.



Bestimmen Sie zeichnerisch und rechnerisch

1. die Spannkraft F_{AC} im Seil AC,
2. die im Mast wirkende Kraft F_{BC}.

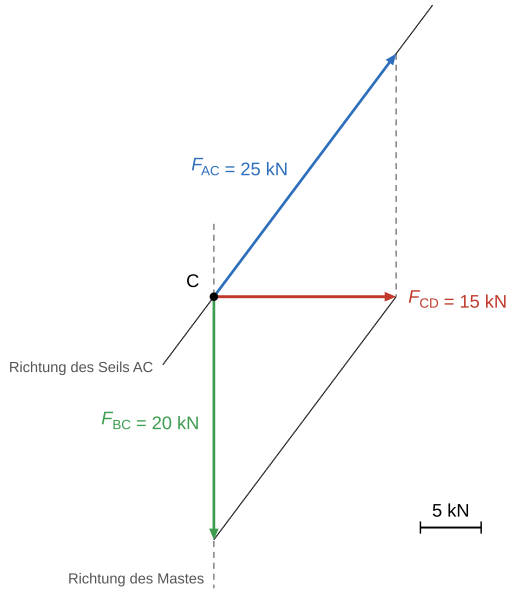
Lösung zu Übungsaufgabe 2

geg.: $\overline{\mathrm{BC}} = 12\,\mathrm{m}$, $\overline{\mathrm{AB}} = 9\,\mathrm{m}$, $F_{\mathrm{CD}} = 15\,\mathrm{kN}$

ges.: F_{AC}, F_{BC}

Lös.:

Zeichnerisch: Die Seilkraft F_{CD} wird im Punkt C in die Richtung des Seils AC und in die Richtung des Mastes zerlegt (Kräfteparallelogramm). Die Komponente in Richtung des Seils spannt das Seil AC, die Komponente in Richtung des Mastes drückt auf den Mast.



Aus der Zeichnung liest man ab:

$$F_{\mathrm{AC}} = 25\,\mathrm{kN} \qquad F_{\mathrm{BC}} = 20\,\mathrm{kN}$$

Rechnerisch: Das Kräftedreieck ist dem Dreieck ABC ähnlich. Mit

$$\overline{\mathrm{AC}} = \sqrt{\overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{BC}}^2} = \sqrt{(9\,\mathrm{m})^2 + (12\,\mathrm{m})^2} = 15\,\mathrm{m}$$

gilt:

$$\frac{F_{\mathrm{AC}}}{F_{\mathrm{CD}}} = \frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{AB}}} \quad \rightarrow \quad F_{\mathrm{AC}} = F_{\mathrm{CD}} \cdot \frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{AB}}} = 15\,\mathrm{kN} \cdot \frac{15\,\mathrm{m}}{9\,\mathrm{m}} = 25\,\mathrm{kN}$$

$$\frac{F_{\mathrm{BC}}}{F_{\mathrm{CD}}} = \frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AB}}} \quad \rightarrow \quad F_{\mathrm{BC}} = F_{\mathrm{CD}} \cdot \frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AB}}} = 15\,\mathrm{kN} \cdot \frac{12\,\mathrm{m}}{9\,\mathrm{m}} = 20\,\mathrm{kN}$$

3 Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften

3.1 Die Zusammensetzung / die Addition von Kräften

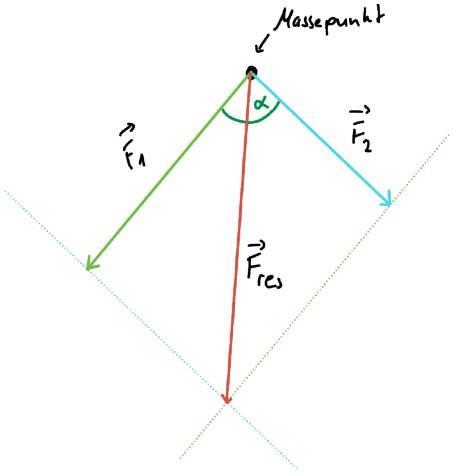


Abbildung 2: Kräfteparallelogramm am Massepunkt

Die Summe aller auf einen Körper wirkenden Kräfte heißt resultierende Kraft oder Gesamtkraft.

$$\vec{F}_{\text{res}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

Der Vektor der resultierenden Kraft kann durch ein Kräfteparallelogramm gefunden werden.

3.1.1 Mathematik: Der Kosinussatz

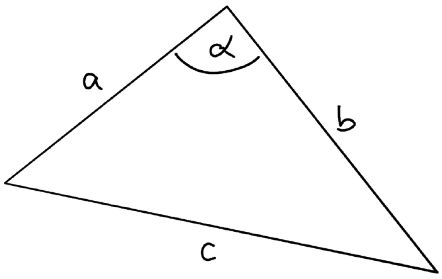


Abbildung 3: Dreieck mit den Seiten a, b, c und dem Winkel α

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\alpha}$$

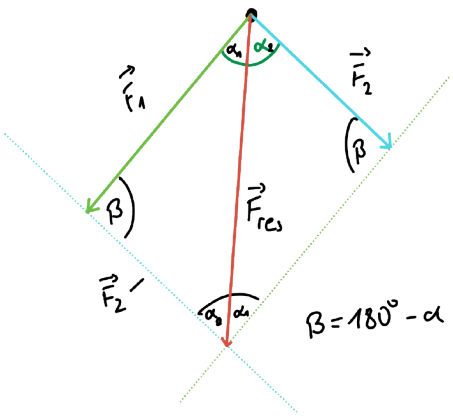


Abbildung 4: Im Kräfteparallelogramm gilt $\beta = 180° - \alpha$.

$$F_{\text{res}}^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos(\beta)$$
$$F_{\text{res}}^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos(180° - \alpha)$$

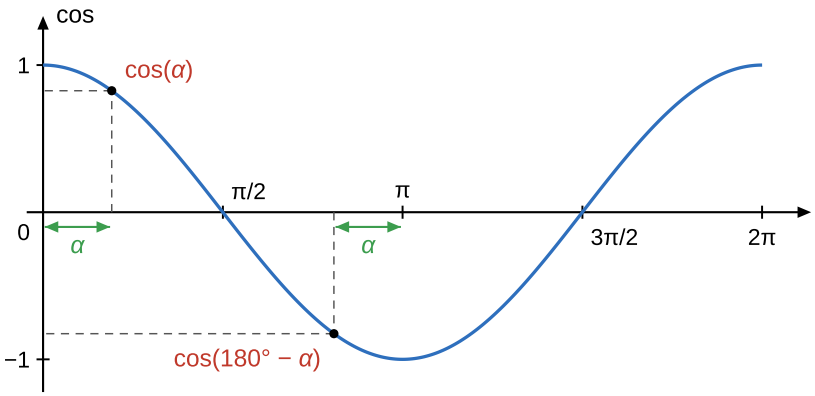


Abbildung 5: Am Graphen der Kosinusfunktion erkennt man: $\cos(\alpha) = -\cos(180° - \alpha)$.

$$\cos(\alpha) = -\cos(180° - \alpha)$$

$$\Rightarrow \quad F_{\text{res}}^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos\alpha$$

→ Der Betrag der resultierenden Kraft kann mit der Gleichung

$$F_{\text{res}} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos\alpha}$$

berechnet werden.

3.2 Die Addition von mehr als 2 Kräften

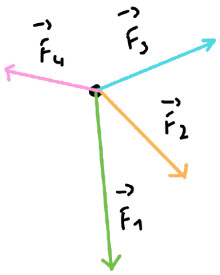


Abbildung 6: Vier Kräfte an einem Massepunkt

- Um die resultierende Kraft auf diesen Massepunkt zu bestimmen, fertigen wir ein Kräftepolygon an.

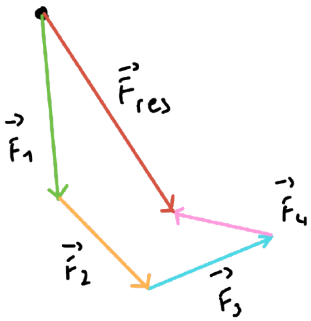


Abbildung 7: Kräftepolygon

- Das Kräftepolygon konstruiert man durch Parallelverschiebung der Teilkräfte.

3.3 Die Zerlegung von Kräften

- Um die Summe von Vektoren zu berechnen, genügt es normalerweise nicht, einfach die Beträge zu addieren.
- Die Beträge zweier Vektoren dürfen nur dann addiert werden, wenn beide in die gleiche Richtung zeigen.

- Zeigen zwei Vektoren in entgegengesetzte Richtungen, wird ein Betrag subtrahiert.

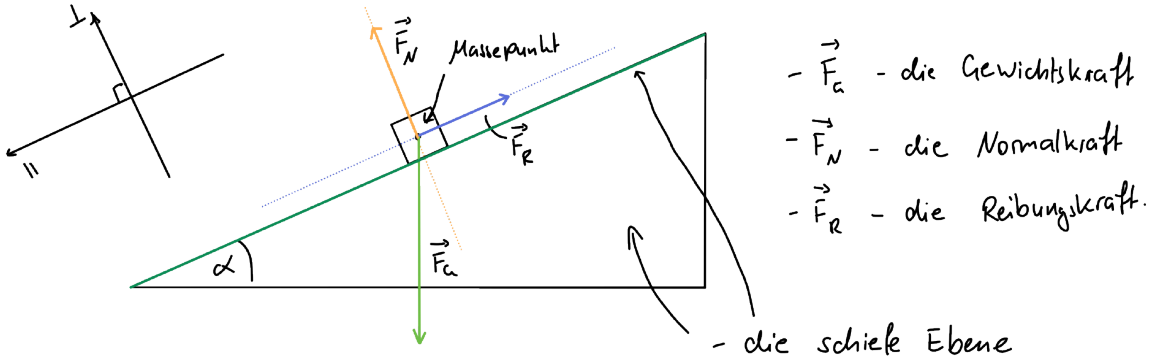


Abbildung 8: Kräfte an einem Massepunkt auf der schiefen Ebene

Wir zerlegen die Gewichtskraft in zwei Komponenten: eine Komponente senkrecht und eine Komponente parallel zur schiefen Ebene.

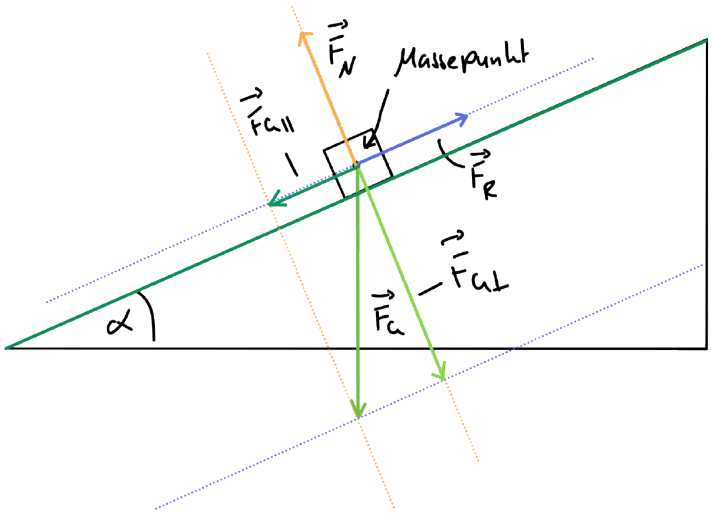


Abbildung 9: Zerlegung der Gewichtskraft

$$F_{\perp\,\mathrm{res}} = F_{\mathrm{N}} - F_{\mathrm{G}\perp} = 0$$

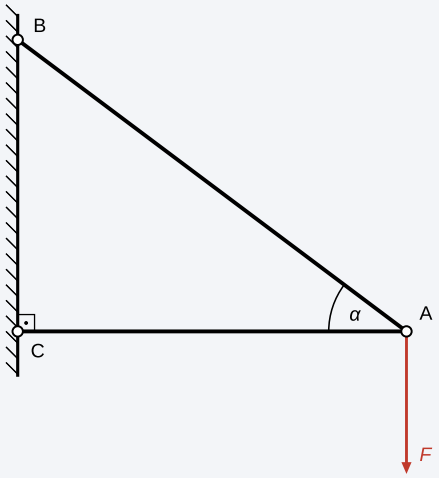
$$F_{\parallel\,\mathrm{res}} = F_{\mathrm{G}\parallel} - F_{\mathrm{R}}$$

- Die Komponente $F_{\mathrm{G}\parallel}$ heißt Hangabtriebskraft F_{HA}.

3.4 Übungen

Übungsaufgabe 1

Ein Wandkran besteht aus dem waagerechten Stab AC und dem schrägen Stab AB. Im Punkt A wirkt eine Kraft F senkrecht nach unten. Der Stab AB darf mit maximal 150 kN belastet werden, der Stab AC mit maximal 120 kN.



1. Berechnen Sie den Winkel α, bei dem beide Stäbe gleichzeitig maximal belastet werden.
2. Berechnen Sie, wie groß die Kraft F dann höchstens sein darf.
3. Berechnen Sie den Abstand der Punkte B und C, wenn der Stab AC 3 m lang ist.

Lösung zu Übungsaufgabe 1

geg.: $F_{\mathrm{AB}} = 150\,\mathrm{kN}$, $F_{\mathrm{AC}} = 120\,\mathrm{kN}$, $\overline{\mathrm{AC}} = 3\,\mathrm{m}$

ges.: α, F, $\overline{\mathrm{BC}}$

Lös.: Die Kraft F wird im Punkt A in die Richtungen der beiden Stäbe zerlegt:

$$\vec{F} = \vec{F}_{\mathrm{AB}} + \vec{F}_{\mathrm{AC}}$$

$\vec{F}_{\mathrm{AC}}$ ist waagerecht, $\vec{F}$ ist senkrecht. Die drei Kräfte bilden ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse F_{AB} und dem Winkel α zwischen F_{AB} und F_{AC}.

Zu 1:

$$\cos\alpha = \frac{F_{\mathrm{AC}}}{F_{\mathrm{AB}}} \quad \rightarrow \quad \alpha = \arccos\left(\frac{F_{\mathrm{AC}}}{F_{\mathrm{AB}}}\right) = \arccos\left(\frac{120\,\mathrm{kN}}{150\,\mathrm{kN}}\right) = 36{,}9^\circ$$

Zu 2:

$$\sin\alpha = \frac{F}{F_{\mathrm{AB}}} \quad \rightarrow \quad F = F_{\mathrm{AB}} \cdot \sin\alpha = 150\,\mathrm{kN} \cdot \sin(36{,}9^\circ) = 90\,\mathrm{kN}$$

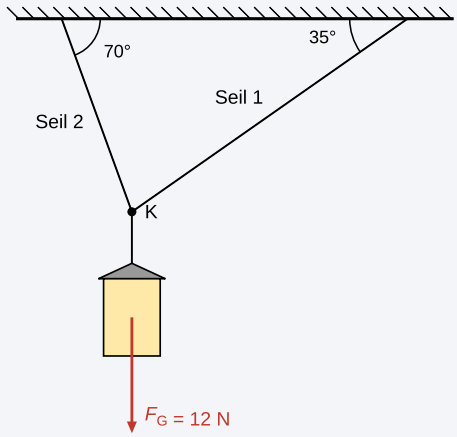
Zu 3: Im Dreieck ABC gilt:

$$\tan\alpha = \frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AC}}} \quad \rightarrow \quad \overline{\mathrm{BC}} = \overline{\mathrm{AC}} \cdot \tan\alpha = 3\,\mathrm{m} \cdot \tan(36{,}9^\circ) = 2{,}25\,\mathrm{m}$$

Größe	Ergebnis
α	$36{,}9°$
F	$90\,\mathrm{kN}$
$\overline{\mathrm{BC}}$	$2{,}25\,\mathrm{m}$

Übungsaufgabe 2

Eine Laterne mit der Gewichtskraft 12 N hängt an zwei Seilen an der Decke. Das Seil 1 schließt mit der Decke einen Winkel von 35° ein, das Seil 2 einen Winkel von 70°.



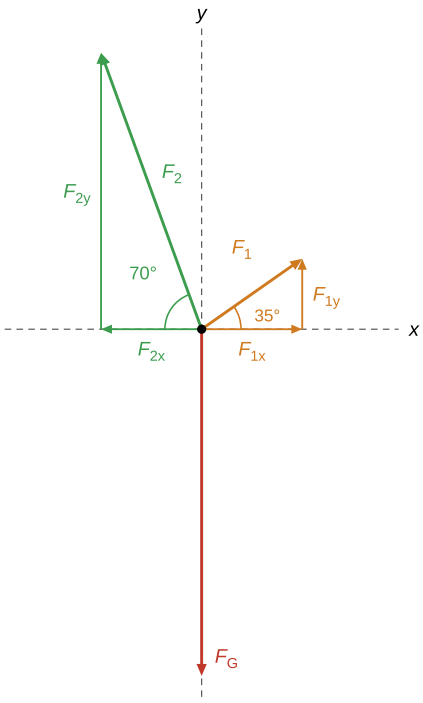
Berechnen Sie die Zugkräfte F_1 und F_2 in den beiden Seilen.

Lösung zu Übungsaufgabe 2

geg.: $F_\mathrm{G} = 12\,\mathrm{N}$, Winkel zur Decke: 35° (Seil 1), 70° (Seil 2)

ges.: F_1, F_2

Lös.:



Die Laterne ruht. In beiden Richtungen heben sich die Kräfte auf:

$$F_{1y} + F_{2y} - F_{\mathrm{G}} = 0$$

$$F_{1x} - F_{2x} = 0 \quad \rightarrow \quad F_{1x} = F_{2x}$$

Für die waagerechten Komponenten gilt:

$$F_{1x} = F_1 \cdot \cos(35^\circ)$$
$$F_{2x} = F_2 \cdot \cos(70^\circ)$$

$$F_1 \cdot \cos(35^\circ) = F_2 \cdot \cos(70^\circ) \quad \rightarrow \quad F_2 = F_1 \cdot \frac{\cos(35^\circ)}{\cos(70^\circ)}$$

Für die senkrechten Komponenten gilt:

$$F_{1y} = F_1 \cdot \sin(35^\circ)$$

$$F_{2y} = F_2 \cdot \sin(70^\circ) = F_1 \cdot \frac{\cos(35^\circ)}{\cos(70^\circ)} \cdot \sin(70^\circ) = F_1 \cdot \cos(35^\circ) \cdot \tan(70^\circ)$$

Einsetzen in die erste Gleichung:

$$F_{\mathrm{G}} = F_1 \cdot \sin(35^\circ) + F_1 \cdot \cos(35^\circ) \cdot \tan(70^\circ)$$
$$F_{\mathrm{G}} = F_1 \cdot (\sin(35^\circ) + \cos(35^\circ) \cdot \tan(70^\circ))$$

$$F_1 = \frac{F_{\mathrm{G}}}{\sin(35^\circ) + \cos(35^\circ) \cdot \tan(70^\circ)} = \frac{12\,\mathrm{N}}{0{,}574 + 0{,}819 \cdot 2{,}747} = 4{,}25\,\mathrm{N}$$

$$F_2 = F_1 \cdot \frac{\cos(35^\circ)}{\cos(70^\circ)} = 4{,}25\,\mathrm{N} \cdot \frac{0{,}819}{0{,}342} = 10{,}2\,\mathrm{N}$$

Größe	Ergebnis
F_1	$4{,}25\,\mathrm{N}$
F_2	$10{,}2\,\mathrm{N}$

4 Das Interpretieren von Gleichungen

$$F = F_1 + F_2$$

→ Bei dieser Gleichung werden Kraftbeträge addiert. Das geht nur, wenn die Kräfte in die gleiche Richtung zeigen.

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

→ Bei dieser Gleichung werden Vektoren addiert, wir können keine Aussage über die Richtung treffen.

4.1 Fünf Fragen an eine Gleichung

Beim Interpretieren einer Größengleichung helfen die folgenden fünf Fragen:

Nr.	Frage	Gesucht ist
(1)	Wie heißt die Gleichung und wofür wird sie verwendet?	Name und Verwendung
(2)	Was bedeuten die Formelzeichen?	Bedeutung der Symbole
(3)	Wie hängen die Größen voneinander ab?	funktionaler Zusammenhang
(4)	Welche Eigenschaft, welcher Zustand oder welcher Vorgang wird beschrieben?	physikalischer Sachverhalt
(5)	Unter welchen Bedingungen gilt die Gleichung? Welche besonderen Werte sind wichtig?	Bedingungen und Sonderfälle

4.2 Übungen

Übungsaufgabe 1

Im Massepunkt A greifen zwei Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ an. Für den Betrag F der resultierenden Kraft gilt je nach Lage der Kräfte eine der folgenden Gleichungen:

(a) $F = F_1 + F_2$

(b) $F = F_1 - F_2$

(c) $F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$

(d) $F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos\alpha}$

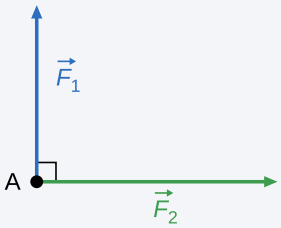
(a)



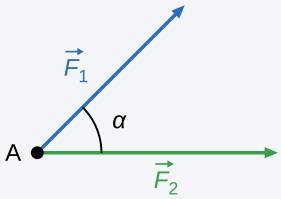
(b)



(c)



(d)



Interpretieren Sie die vier Gleichungen. Verwenden Sie dazu die Fragen (1) bis (5).

Lösung zu Übungsaufgabe 1

Für alle vier Gleichungen gilt:

- Zu (1): Die Gleichung gibt den Betrag der resultierenden Kraft zweier Kräfte an, die im selben Massepunkt angreifen.
- Zu (2): F ist der Betrag der resultierenden Kraft, F_1 und F_2 sind die Beträge der Teilkräfte, α ist der Winkel zwischen den beiden Kräften.

(a) $F = F_1 + F_2$

- Zu (3): F ist die Summe der beiden Beträge. Wird eine Teilkraft größer, wird F um denselben Wert größer.
- Zu (4): Beide Kräfte zeigen in die gleiche Richtung. Die resultierende Kraft zeigt ebenfalls in diese Richtung.
- Zu (5): Die Gleichung gilt nur, wenn beide Kräfte in die gleiche Richtung zeigen ($\alpha = 0°$).

(b) $F = F_1 - F_2$

- Zu (3): F ist die Differenz der beiden Beträge. Wird F_2 größer, wird F kleiner.
- Zu (4): Die Kräfte zeigen in entgegengesetzte Richtungen. Die resultierende Kraft zeigt in die Richtung der größeren Kraft.
- Zu (5): Die Gleichung gilt nur für entgegengesetzte Richtungen ($\alpha = 180°$) und $F_1 \geq F_2$. Sonderfall: Für $F_1 = F_2$ ist $F = 0$.

(c) $F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$

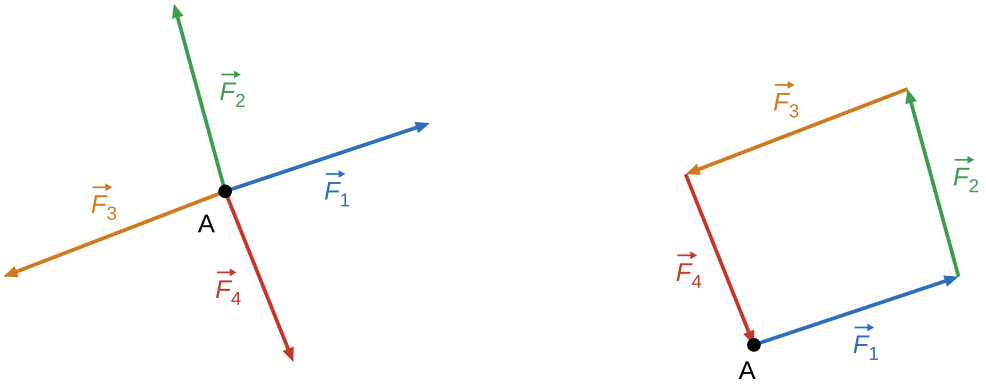
- Zu (3): Der Zusammenhang entspricht dem Satz des Pythagoras. F ist größer als jede Teilkraft, aber kleiner als die Summe der Beträge.
- Zu (4): Die Kräfte stehen senkrecht aufeinander. Die resultierende Kraft ist die Diagonale des Rechtecks, das die beiden Kräfte aufspannen.
- Zu (5): Die Gleichung gilt nur, wenn die Kräfte senkrecht aufeinander stehen ($\alpha = 90°$).

(d) $F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos\alpha}$

- Zu (3): F hängt von beiden Beträgen und vom Winkel α ab. Je größer α zwischen 0° und 180° ist, desto kleiner ist F.
- Zu (4): Die Kräfte schließen einen beliebigen Winkel α ein. Die resultierende Kraft ist die Diagonale des Kräfteparallelogramms.
- Zu (5): Die Gleichung gilt für jeden Winkel. Sonderfälle: $\alpha = 0°$ ergibt (a), $\alpha = 180°$ ergibt (b), $\alpha = 90°$ ergibt (c).

5 Das statische Gleichgewicht

Definition: Ein Körper befindet sich im statischen Gleichgewicht, wenn die Resultierende aller auf ihn wirkenden Kräfte gleich null ist. → Trägheitsprinzip



Teilkräfte geschlossenes Kräftepolygon

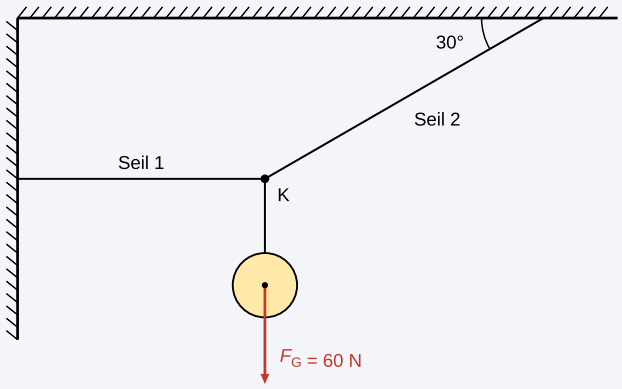
Abbildung 10: Teilkräfte an einem Massepunkt im Gleichgewicht und das zugehörige Kräftepolygon

Das Kräftepolygon ist ein geschlossenes Kräftepolygon.

5.1 Übungen

Übungsaufgabe 1

Eine Lampe mit der Gewichtskraft 60 N hängt an einem Knoten, der von zwei Seilen gehalten wird. Das Seil 1 verläuft waagerecht zur Wand. Das Seil 2 verläuft schräg zur Decke und schließt mit ihr einen Winkel von 30° ein.



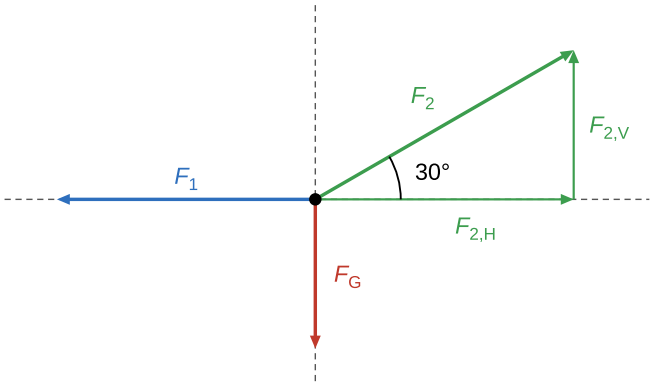
Berechnen Sie die Zugkräfte im waagerechten Seil und im schrägen Seil.

Lösung zu Übungsaufgabe 1

geg.: $F_G = 60\,\mathrm{N}$, Winkel zwischen Seil 2 und Decke: 30°

ges.: F_1, F_2

Lös.:



$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_G = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad F_{\text{res,H}} = 0 \wedge F_{\text{res,V}} = 0$$

Senkrechte Richtung:

$$F_G = F_{2,V} = F_2 \cdot \sin(30°)$$

$$F_2 = \frac{F_G}{\sin(30°)} = \frac{60\,\text{N}}{\sin(30°)} = 120\,\text{N}$$

Waagerechte Richtung:

$$F_{2,H} = F_1$$

$$F_{2,H} = F_2 \cdot \cos(30°) = F_G \cdot \frac{\cos(30°)}{\sin(30°)} = \frac{60\,\text{N}}{\tan(30°)} = 104\,\text{N}$$

$$F_1 = 104\,\text{N}$$

Übungsaufgabe 2

Auf einer 250 m langen Straße, die um 20 m ansteigt, steht ein Anhänger mit der Gewichtskraft 15 kN.

1. Veranschaulichen Sie den Sachverhalt in einer Skizze.
2. Bestimmen Sie die Kraft, die erforderlich ist, damit der Anhänger nicht abwärts rollt.

Lösung zu Übungsaufgabe 2

geg.: $l = 250\,\text{m}$, $h = 20\,\text{m}$, $F_G = 15\,\text{kN}$

ges.: F

Lös.:

Zu 1:

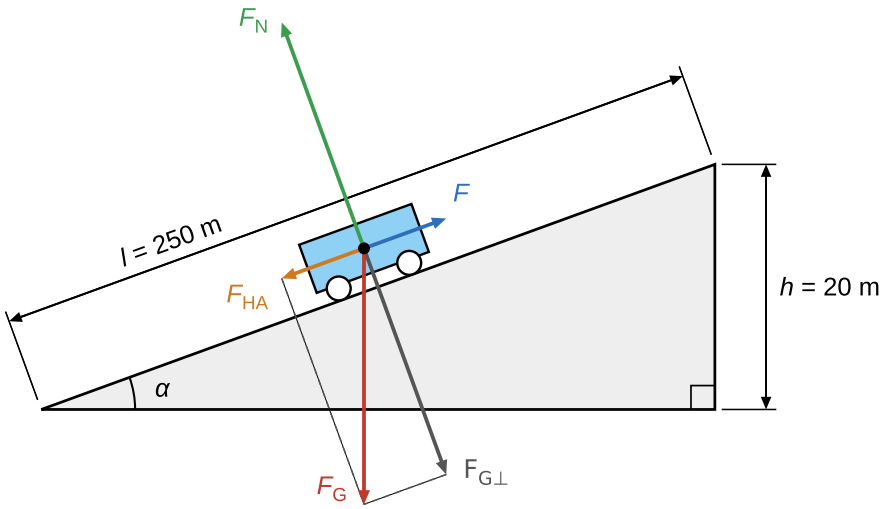


Abbildung 11: Skizze (nicht maßstäblich)

Zu 2: Die Kraft F muss die Hangabtriebskraft ausgleichen. Mit

$$\sin\alpha = \frac{h}{l}$$

gilt:

$$F = F_{\mathrm{HA}} = F_{\mathrm{G}} \cdot \sin\alpha = F_{\mathrm{G}} \cdot \frac{h}{l} = 15\,000\,\mathrm{N} \cdot \frac{20\,\mathrm{m}}{250\,\mathrm{m}} = 1200\,\mathrm{N} = 1{,}2\,\mathrm{kN}$$

6 Grundlegende Größen der Kinematik

Die Kinematik

- beschäftigt sich mit Bewegungen, ohne dass äußere Kräfte berücksichtigt werden.

6.1 Grundlegende Größen

6.1.1 Der Ort

- Der Ort eines Körpers ist der Punkt, an dem sich der Körper zu einem bestimmten Zeitpunkt befindet.

  „Das Fahrzeug befindet sich am Ort A.“

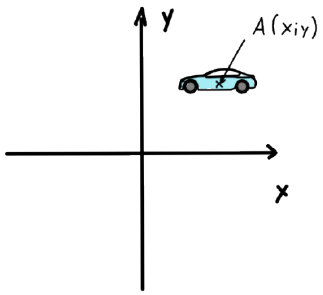


Abbildung 12: Das Fahrzeug am Ort A

6.1.2 Die Ortsänderung und der Weg

- Die Ortsänderung $(\Delta x; \Delta y; \Delta z)$ ist die gerichtete Strecke zwischen zwei Orten, ihr Betrag ist der Abstand:

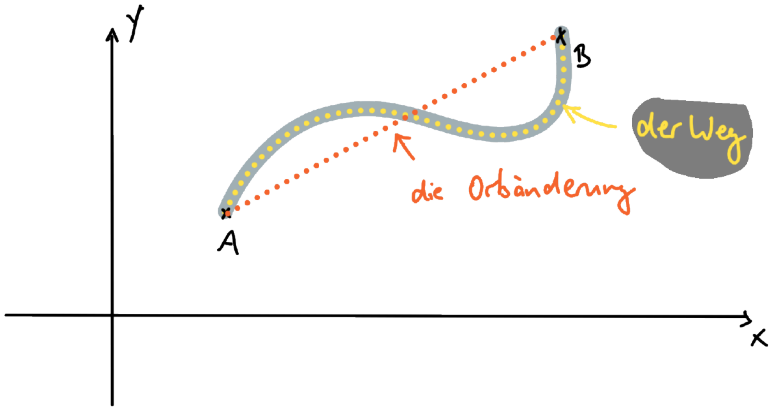


Abbildung 13: Ortsänderung und Weg zwischen den Orten A und B

- Der Weg s ist die tatsächliche Strecke, die zwischen zwei Orten zurückgelegt wird.
- Wege und Ortsänderungen sind Längen, die in Metern angegeben werden.

6.1.3 Die Geschwindigkeit

- Die Geschwindigkeit $\vec{v}$ (velocity) gibt an, welchen Weg ein Körper in einer bestimmten Zeitspanne zurücklegt.

→ Die Richtung der Geschwindigkeit zeigt immer in die Richtung der Tangente des Weges.

→ Es gilt für die Momentangeschwindigkeit:

$$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{s}}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{s}}(t)$$

Es werden sehr kleine Zeitabstände betrachtet.

$\dot{\vec{s}}(t)$ bedeutet: Es handelt sich um die erste Ableitung nach der Zeit t.

Die Durchschnittsgeschwindigkeit („v quer“):

$$\bar{v} = \frac{s_{\text{ges}}}{t_{\text{ges}}}$$

→ Um uns der Momentangeschwindigkeit anzunähern, kann die Gleichung

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t}$$

verwendet werden.

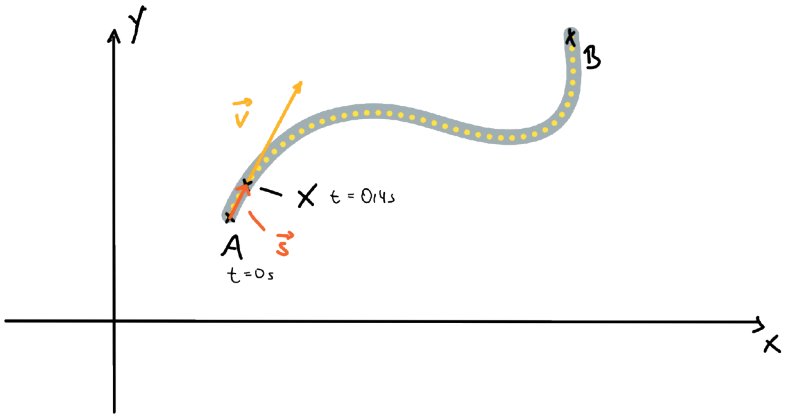


Abbildung 14: Die Geschwindigkeit zeigt in die Richtung der Tangente des Weges.

→ Die Standardeinheit der Geschwindigkeit ist 1 Meter pro Sekunde.

$$[v] = 1\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

→ Eine weitere Einheit, die im Alltag verwendet wird, heißt Kilometer pro Stunde.

$$1\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

→ Die Formulierung Stundenkilometer sollte nicht verwendet werden, denn sie impliziert das falsche h · km.

→ Umrechnung:

$$100\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 100\,\frac{\frac{1}{1000}\,\text{km}}{\frac{1}{3600}\,\text{h}} = 100 \cdot \frac{3600}{1000}\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 100 \cdot 3{,}6\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 360\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$100\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 100\,\frac{1000\,\text{m}}{3600\,\text{s}} = 100 \cdot \frac{1}{3{,}6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 27{,}78\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$100\,\frac{\text{km}}{\text{h}} : 3{,}6 = 27{,}78\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \qquad 27{,}78\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 3{,}6 = 100\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

6.1.4 Die Beschleunigung

- Die Beschleunigung $\vec{a}$ (acceleration) gibt an, wie sich die Geschwindigkeit eines Körpers in einer bestimmten Zeitspanne verändert.

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \qquad \text{und für } \Delta t \to 0: \qquad \vec{a}(t) = \frac{\text{d}\vec{v}}{\text{d}t} = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{s}}\,(t)$$

- Die Einheit der Beschleunigung ist 1 Meter pro Quadratsekunde.

$$[a] = 1\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1\,\frac{\frac{\text{m}}{\text{s}}}{\text{s}}$$

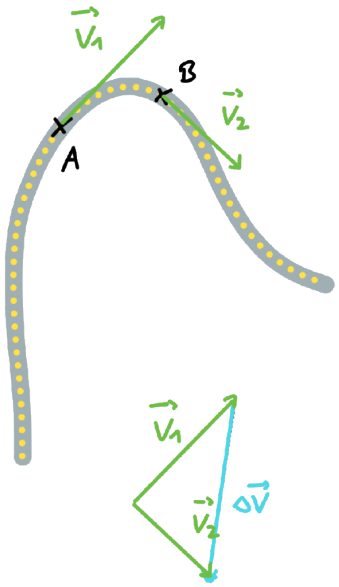


Abbildung 15: Geschwindigkeiten $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ an den Orten A und B und die Geschwindigkeitsänderung $\Delta\vec{v}$

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t}$$

$\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 \Leftrightarrow \vec{v}_2 = \Delta\vec{v} + \vec{v}_1$

7 Bewegungsarten

Man unterscheidet:

- beschleunigte und nicht beschleunigte Bewegungen
- geradlinige und krummlinige Bewegungen
- Bewegungen mit konstanter Beschleunigung und variabler Beschleunigung
- Rotation und Translation

  Rotation: Bewegung um eine körpereigene Achse

  Translation: Bewegung entlang einer Bahn

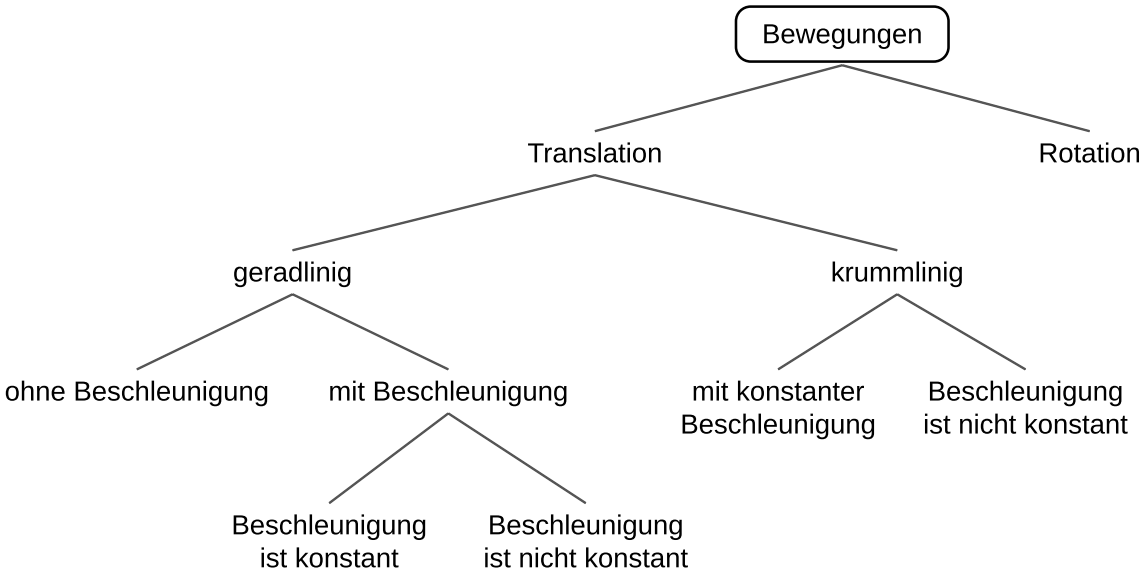


Abbildung 16: Übersicht über die Bewegungsarten

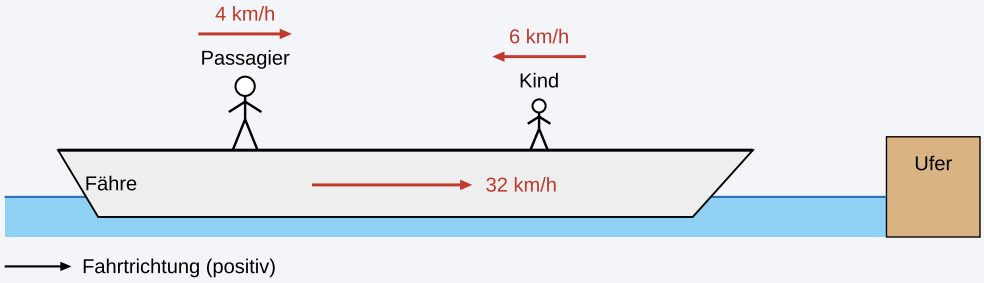
8 Bezugssysteme

- Bezugssysteme werden benötigt, um die Bewegung von Körpern zu beschreiben. Ob sich ein Körper in Ruhe befindet oder eine Geschwindigkeit hat, hängt vom Bezugssystem ab.
- Man kann sich ein Bezugssystem als bewegtes (oder ruhendes) Koordinatensystem vorstellen.
- Bezugssysteme, in denen die Newtonschen Gesetze gelten, heißen Inertialsysteme.

8.1 Übungen

Übungsaufgabe 1

Eine Fähre fährt mit der Geschwindigkeit $32\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ am Ufer entlang. Ein Passagier geht auf dem Deck in Fahrtrichtung nach vorn. Seine Geschwindigkeit relativ zur Fähre beträgt $4\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Ein Kind rennt ihm mit $6\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ relativ zur Fähre entgegen.



Ergänzen Sie die Tabelle. In jeder Zeile steht, welche Geschwindigkeit das Ufer, die Fähre, der Passagier und das Kind im jeweiligen Bezugssystem haben. Die Fahrtrichtung der Fähre ist die positive Richtung.

Bezugssystem	Ufer	Fähre	Passagier	Kind
Ufer	0			
Fähre	$-32\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$	0		
Passagier		$-4\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$	0	
Kind		$6\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$		0

Lösung zu Übungsaufgabe 1

Alle Geschwindigkeiten in $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$:

Bezugssystem	Ufer	Fähre	Passagier	Kind
Ufer	0	32	36	26
Fähre	−32	0	4	−6
Passagier	−36	−4	0	−10
Kind	−26	6	10	0

Beispiel: Im Bezugssystem Ufer hat der Passagier die Geschwindigkeit

$$v = 32\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} + 4\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 36\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

Im Bezugssystem Passagier hat das Kind die Geschwindigkeit

$$v = -6\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} - 4\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = -10\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

9 Die geradlinige gleichförmige Bewegung

→ Ein Körper bewegt sich geradlinig gleichförmig, wenn sich seine Geschwindigkeit nicht verändert / wenn seine Geschwindigkeit konstant bleibt.

$$\vec{v}(t) = \text{konstant}$$

→ Der Betrag ist konstant → gleichförmig

→ Die Richtung ist konstant → geradlinig

9.1 Die Bewegungsgleichungen der geradlinigen gleichförmigen Bewegung

Es gilt:

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{v}}(t) \qquad \vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{s}}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{s}}(t)$$

$$\vec{v} = \text{konstant} \Leftrightarrow \Delta\vec{v} = \vec{0} \quad \rightarrow \quad \vec{a}(t) = \vec{0}$$

$$a(t) = 0$$

$$v(t) = \int a(t)\,\mathrm{d}t$$

$$v(t) = \int 0\,\mathrm{d}t$$

$$v(t) = v_0 \qquad (\text{konstant})$$

$$s(t) = \int v(t)\,\mathrm{d}t$$

$$s(t) = \int v_0\,\mathrm{d}t$$

$$s(t) = v_0 \cdot t + s_0$$

Die Bewegungsgleichungen der geradlinigen gleichförmigen Bewegung sind:

$$a(t) = 0$$
$$v(t) = v_0$$
$$s(t) = v_0 \cdot t + s_0$$

Dabei sind:

- v_0 – die Anfangsgeschwindigkeit
- s_0 – der Anfangsweg

9.2 Das Zeit-Weg-Diagramm / das s(t)-Diagramm

Vergleiche: x-y-Diagramm / y(x)-Diagramm

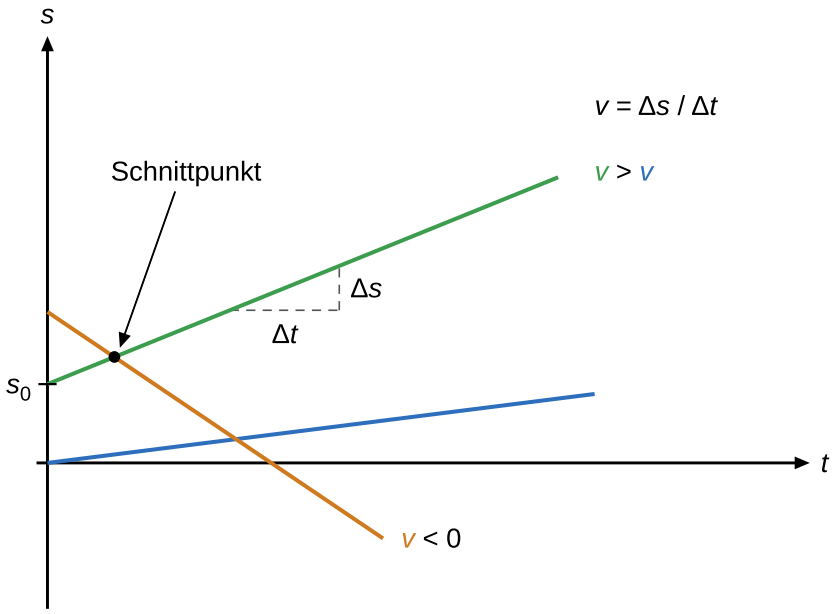


Abbildung 17: s(t)-Diagramm von drei geradlinigen gleichförmigen Bewegungen

→ Schneiden sich zwei Funktionen im s(t)-Diagramm, handelt es sich um den Punkt, an dem sich die beiden Körper treffen.

9.3 Das Zeit-Geschwindigkeit-Diagramm / das v(t)-Diagramm

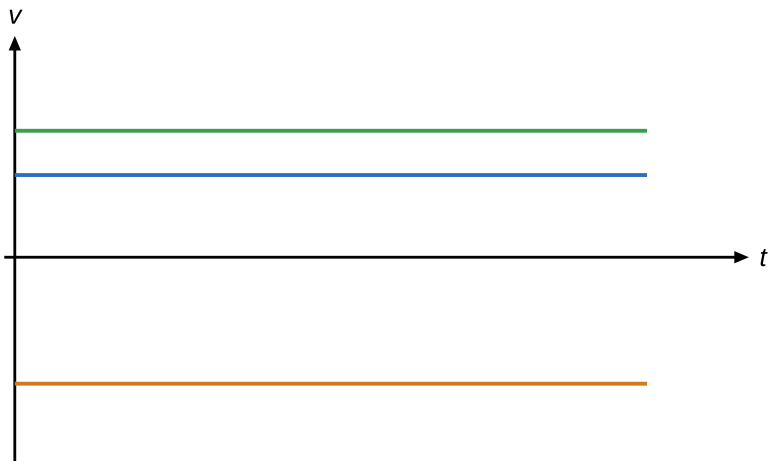


Abbildung 18: v(t)-Diagramm der drei Bewegungen

9.4 Das Zeit-Beschleunigungs-Diagramm / das a(t)-Diagramm

→ Das Zeit-Beschleunigungs-Diagramm ist in allen Fällen eine Gerade, die mit der t-Achse identisch ist.

9.5 Übungen

Übungsaufgabe 1

Ein Ruderer benötigt für eine 6 km lange Strecke eine Zeit von 25 Minuten.

Berechnen Sie die Durchschnittsgeschwindigkeit des Ruderers.

Lösung zu Übungsaufgabe 1

geg.: $s = 6\,\mathrm{km} = 6000\,\mathrm{m}$, $t = 25\,\mathrm{min} = 1500\,\mathrm{s}$

ges.: $\bar{v}$

Lös.:

$$\bar{v} = \frac{s}{t} = \frac{6000\,\mathrm{m}}{1500\,\mathrm{s}} = 4{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 14{,}4\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

Übungsaufgabe 2

Auf einer zweigleisigen Strecke startet der Zug A bei Streckenkilometer 120 mit dem Geschwindigkeitsbetrag $80\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ und fährt dem Zug B entgegen. Dieser startet zeitgleich bei Streckenkilometer 210 und fährt mit $100\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Beide halten den Betrag der Geschwindigkeit konstant.

Bestimmen Sie grafisch und durch Rechnung den Punkt, an dem sich die beiden Züge begegnen.

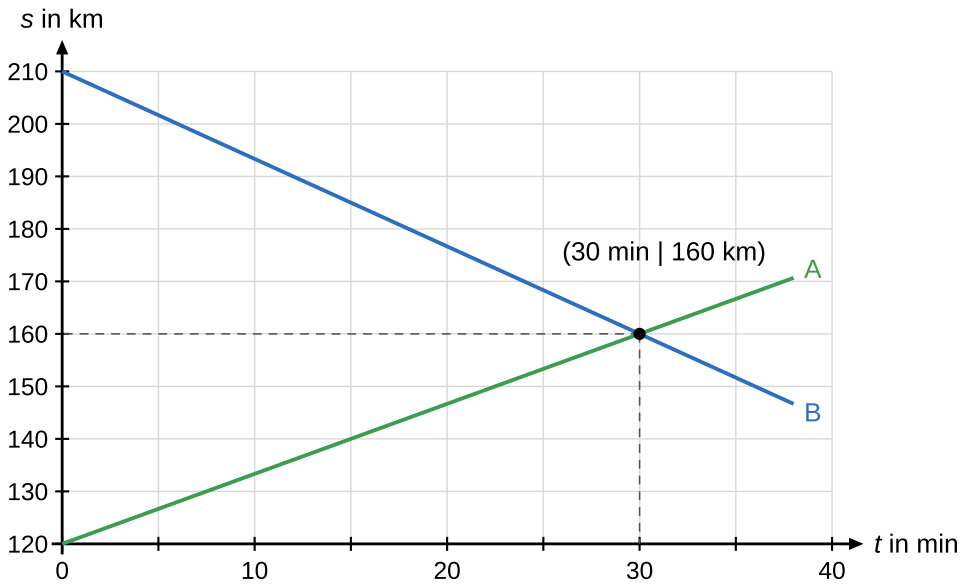
Lösung zu Übungsaufgabe 2

geg.: $s_{0,\mathrm{A}} = 120\,\mathrm{km}$, $v_\mathrm{A} = 80\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$, $s_{0,\mathrm{B}} = 210\,\mathrm{km}$, $v_\mathrm{B} = -100\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$

ges.: t und s am Treffpunkt

Lös.:

Grafisch:



Aus dem Diagramm liest man ab: Die Züge begegnen sich nach 30 min bei Streckenkilometer 160.

Rechnerisch:

$$s_\mathrm{A}(t) = 80\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \cdot t + 120\,\mathrm{km}$$

$$s_\mathrm{B}(t) = -100\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \cdot t + 210\,\mathrm{km}$$

$$
\begin{aligned}
s_{\mathrm{A}}(t) &= s_{\mathrm{B}}(t) \\
80\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \cdot t + 120\,\mathrm{km} &= -100\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \cdot t + 210\,\mathrm{km} \\
180\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \cdot t &= 90\,\mathrm{km} \\
t &= \frac{90}{180}\,\mathrm{h} = 0{,}5\,\mathrm{h} = 1800\,\mathrm{s}
\end{aligned}
$$

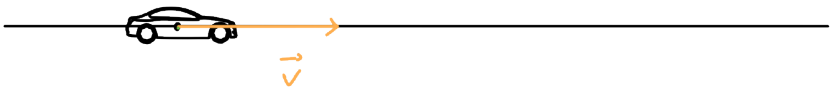
$$
s_{\mathrm{A}}(0{,}5\,\mathrm{h}) = 80\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \cdot 0{,}5\,\mathrm{h} + 120\,\mathrm{km} = 160\,\mathrm{km}
$$

Die Züge begegnen sich nach 30 Minuten bei Streckenkilometer 160.

10 Die geradlinige gleichmäßig beschleunigte Bewegung

Definition: Ein Körper bewegt sich geradlinig gleichmäßig beschleunigt, wenn $\vec{a}$ konstant ist und die Bewegung eindimensional ist.

eindimensional:



→ Der Körper bewegt sich in eine bestimmte Richtung. → geradlinig

→ Der Körper ändert seine Geschwindigkeit in gleichen Zeiten um den gleichen Wert. → gleichmäßig beschleunigt

10.1 Herleitung der Bewegungsgleichungen

Es gilt:

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \rightarrow v = \int a \,\mathrm{d}t \qquad v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \rightarrow s = \int v \,\mathrm{d}t \qquad a = \text{konstant} \neq 0$$

$$v(t) = \int a \,\mathrm{d}t = a \cdot t + v_0$$

$$s(t) = \int v(t) \,\mathrm{d}t = \int (a \cdot t + v_0) \mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0$$

Die Bewegungsgleichungen der geradlinigen gleichmäßig beschleunigten Bewegung lauten:

$$s(t) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0$$
$$v(t) = a \cdot t + v_0$$
$$a(t) = a = \text{konstant}, \quad a \neq 0$$

10.2 Das Zeit-Weg-Diagramm der gleichmäßig beschleunigten geradlinigen Bewegung

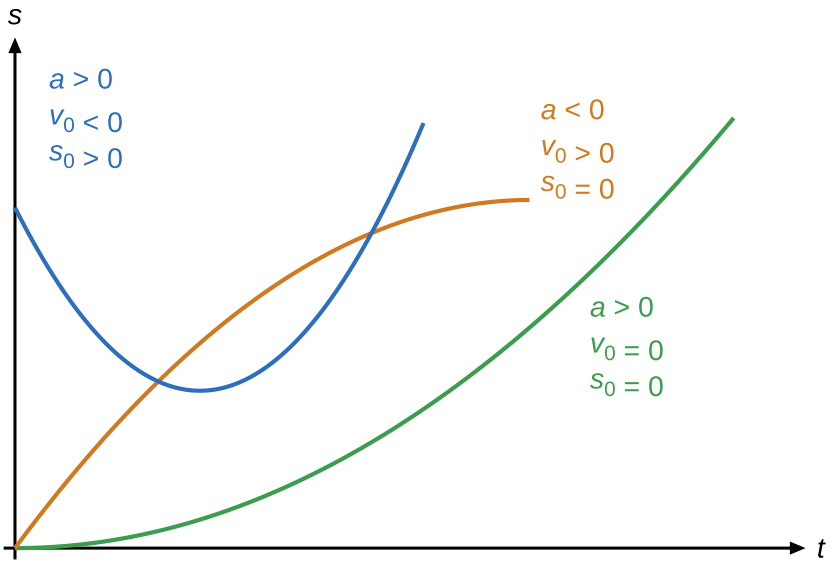


Abbildung 19: s(t)-Diagramm von drei gleichmäßig beschleunigten Bewegungen

10.3 Das Zeit-Geschwindigkeit-Diagramm

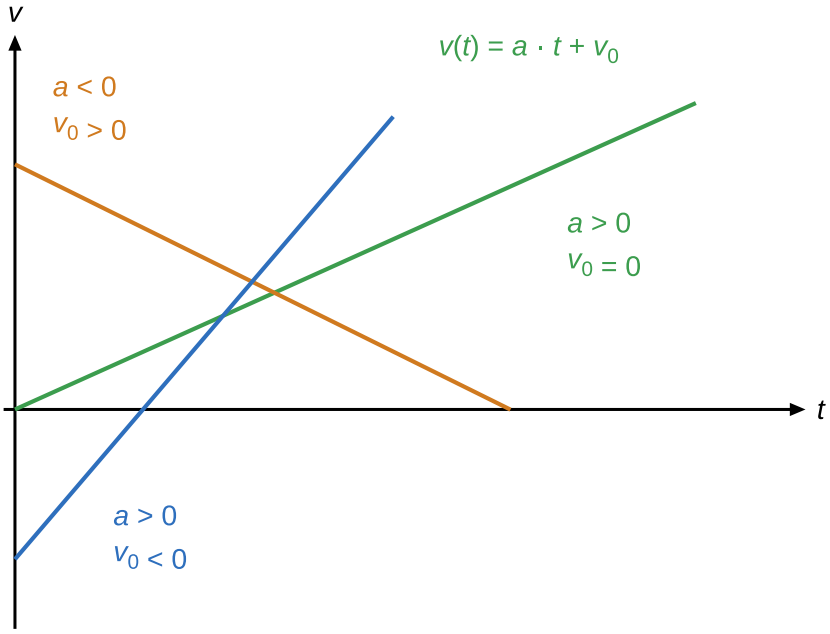


Abbildung 20: v(t)-Diagramm der drei Bewegungen

10.4 Das Zeit-Beschleunigungs-Diagramm

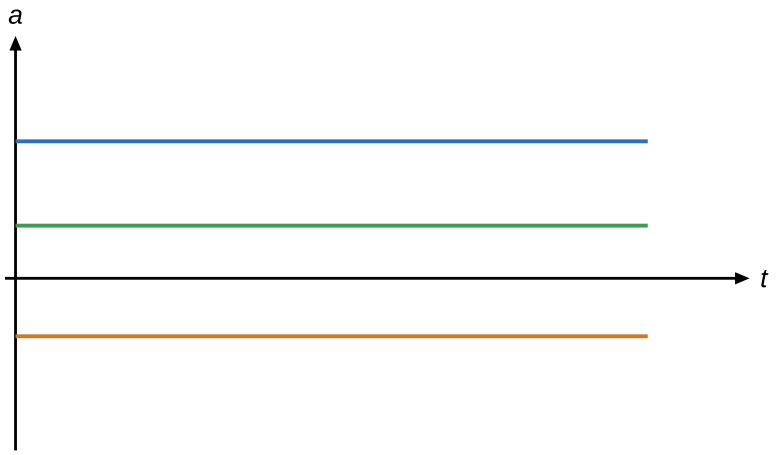


Abbildung 21: a(t)-Diagramm der drei Bewegungen

10.5 Übungen

Übungsaufgabe 1

Ein Motorroller erreicht aus der Ruhe nach 8 s die Geschwindigkeit $12\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Berechnen Sie seine Beschleunigung und den in dieser Zeit zurückgelegten Weg.

Lösung zu Übungsaufgabe 1

geg.: $v_0 = 0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $t = 8\,\mathrm{s}$, $v = 12\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

ges.: a, s

Lös.: Mit $v_0 = 0$ und $s_0 = 0$ gilt:

$$v(t) = a \cdot t \quad \rightarrow \quad a = \frac{v}{t} = \frac{12\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{8\,\mathrm{s}} = 1{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

$$s(t) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (8\,\mathrm{s})^2 = 48\,\mathrm{m}$$

Übungsaufgabe 2

Ein Flugzeug beschleunigt beim Start aus der Ruhe innerhalb von 12 Sekunden auf $90\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

a) Bestimmen Sie die Zeit, innerhalb der das Flugzeug bei gleicher Beschleunigung den Geschwindigkeitsbetrag $270\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ erreicht.

b) Berechnen Sie den in dieser Zeit zurückgelegten Weg.

Lösung zu Übungsaufgabe 2

geg.: $v_0 = 0$, $t_1 = 12\,\mathrm{s}$, $v_1 = 90\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 25\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $v_2 = 270\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 75\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

ges.: t_2, s_2

Lös.:

Zu a): Die Beschleunigung folgt aus den ersten 12 Sekunden:

$$v(t) = a \cdot t \quad \rightarrow \quad a = \frac{v_1}{t_1} = \frac{25\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{12\,\mathrm{s}} = 2{,}08\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

$$t_2 = \frac{v_2}{a} = \frac{v_2}{v_1} \cdot t_1 = \frac{75\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{25\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} \cdot 12\,\mathrm{s} = 36\,\mathrm{s}$$

Zu b):

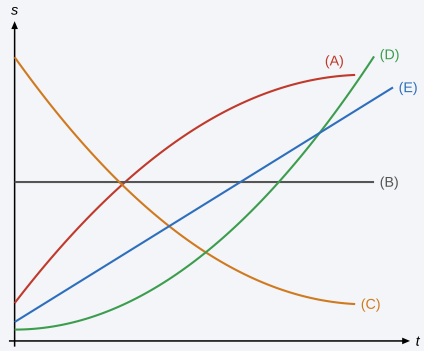
$$s_2 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 2{,}08\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (36\,\mathrm{s})^2 = 1350\,\mathrm{m}$$

Größe	Ergebnis
a	$2{,}08\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$
t_2	$36\,\mathrm{s}$
s_2	$1350\,\mathrm{m}$

10.6 Übungsaufgaben zu Bewegungsdiagrammen

Übungsaufgabe 3

Das Diagramm zeigt fünf Weg-Zeit-Kurven (A) bis (E).



Geben Sie an, welche Kurven die Bewegung eines Körpers

a) mit positiver Beschleunigung,

b) mit konstanter positiver Geschwindigkeit,

c) in ständigem Stillstand,

d) mit negativer Beschleunigung

zeigen. Es kann jeweils mehr als eine richtige Antwort geben.

Lösung zu Übungsaufgabe 3

Im s(t)-Diagramm gilt: Die Steigung ist die Geschwindigkeit $v(t) = \dot{s}(t)$. Wird die Steigung größer, ist die Beschleunigung positiv, wird sie kleiner, ist die Beschleunigung negativ.

a) (C) und (D): Bei beiden Kurven nimmt die Steigung zu. Bei (D) wird die positive Steigung größer. Bei (C) ist die Steigung negativ und wird weniger negativ.

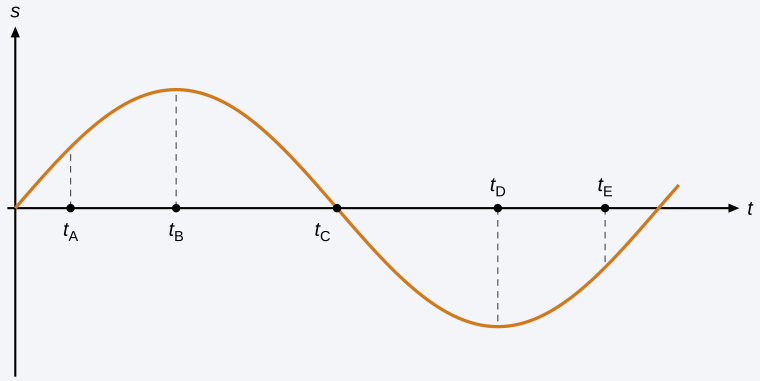
b) (E): Die Kurve ist eine steigende Gerade, die Steigung ist konstant und positiv.

c) (B): Die Kurve ist eine waagerechte Gerade, der Ort ändert sich nicht.

d) (A): Die Steigung ist positiv und nimmt ab.

Übungsaufgabe 4

Ein Körper bewegt sich auf einer Geraden. Seine Weg-Zeit-Kurve ist im Diagramm dargestellt.



Geben Sie an, zu welchem der markierten Zeitpunkte bzw. zu welchen Zeitpunkten

a) sein Geschwindigkeitsbetrag am kleinsten ist,

b) seine Beschleunigung positiv ist,

c) seine Geschwindigkeit negativ ist.

Lösung zu Übungsaufgabe 4

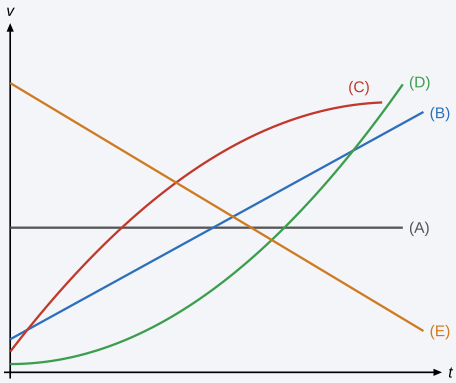
a) Zu den Zeitpunkten t_B und t_D: Dort hat die Kurve einen Hochpunkt bzw. einen Tiefpunkt. Die Steigung und damit die Geschwindigkeit ist null.

b) Zu den Zeitpunkten t_D und t_E: Dort ist die Kurve nach oben gekrümmt, die Steigung nimmt zu.

c) Zum Zeitpunkt t_C: Dort fällt die Kurve, die Steigung ist negativ.

Übungsaufgabe 5

Das Diagramm zeigt fünf Geschwindigkeit-Zeit-Kurven (A) bis (E).



Geben Sie an, welche Kurven die Bewegung eines Körpers

a) mit konstanter positiver Beschleunigung,

b) mit zeitlich abnehmender positiver Beschleunigung,

c) mit zeitlich zunehmender positiver Beschleunigung,

d) ohne Beschleunigung

beschreiben. Es kann jeweils mehr als eine richtige Antwort geben.

Lösung zu Übungsaufgabe 5

Im v(t)-Diagramm gilt: Die Steigung ist die Beschleunigung $a(t) = \dot{v}(t)$.

a) (B): Die Kurve ist eine steigende Gerade, die Steigung ist konstant und positiv.

b) (C): Die Kurve steigt, wird aber immer flacher. Die Steigung ist positiv und nimmt ab.

c) (D): Die Kurve steigt und wird immer steiler. Die Steigung ist positiv und nimmt zu.

d) (A): Die Kurve ist eine waagerechte Gerade, die Geschwindigkeit ändert sich nicht.

Die Kurve (E) ist eine fallende Gerade. Sie beschreibt eine Bewegung mit konstanter negativer Beschleunigung und passt zu keiner der vier Beschreibungen.

11 Der freie Fall

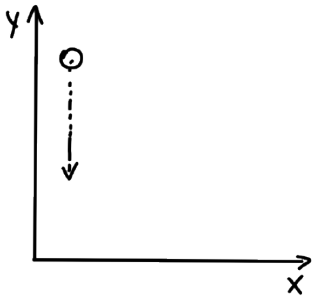
→ Ein Körper befindet sich im freien Fall, wenn er ohne Luftwiderstand fällt.

→ Der freie Fall ist ein Spezialfall der geradlinigen gleichmäßig beschleunigten Bewegung.

→ Die Beschleunigung ist am selben Ort für alle frei fallenden Körper exakt gleich.

→ Auf der Erde beträgt die Fallbeschleunigung im Durchschnitt $9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

11.1 Die Bewegungsgleichungen des freien Falls



$$a(t) = -g = -\ 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$
$$v(t) = -g \cdot t$$
$$y(t) = -\frac{g}{2} \cdot t^2 + y_0$$

y_0: Anfangshöhe

11.2 Beispiel

Beispielaufgabe

Ein Floh beschleunigt beim Absprung auf einer Strecke von 0,80 mm aus der Ruhe auf die Geschwindigkeit $1{,}2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Bei der Landung auf einem weichen Untergrund wird er mit derselben Geschwindigkeit auf einer Strecke von 2,0 mm bis zum Stillstand abgebremst. Nehmen Sie konstante Beschleunigungen an.

Bestimmen Sie die Beschleunigung in Vielfachen von g während

a) des Absprungs,

b) der Abbremsung.

geg.: $s_1 = 0{,}80\,\mathrm{mm} = 8{,}0 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}$, $v_{\max} = 1{,}2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $s_2 = 2{,}0\,\mathrm{mm} = 2{,}0 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$

ges.: a_1, a_2 in g

Lös.:

$$s(t) = \frac{a}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0$$
$$v(t) = a \cdot t + v_0$$

Zu a):

$$s_1(t_1) = \frac{a_1}{2} \cdot t_1^2$$
$$v(t_1) = v_{\max} = a_1 \cdot t_1$$

① $v(t)$ nach t umstellen

$$v_{\max} = a_1 \cdot t_1 \quad \rightarrow \quad t_1 = \frac{v_{\max}}{a_1}$$

② Setze t in $s(t)$

$$s_1 = \frac{a_1}{2} \cdot t_1^2 = \frac{a_1}{2} \cdot \left(\frac{v_{\max}}{a_1}\right)^2 = \frac{a_1}{2} \cdot \frac{v_{\max}^2}{a_1^2} = \frac{v_{\max}^2}{2 \cdot a_1}$$

$$a_1 = \frac{v_{\max}^2}{2 \cdot s_1} = \frac{\left(1{,}2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{2 \cdot 8{,}0 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}} = 900\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

$$a_1 = n \cdot g \quad \rightarrow \quad n = \frac{a_1}{g} = \frac{900\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} \approx 92 \quad \rightarrow \quad a_1 \approx 92\,g$$

Zu b):

$$s_2(t_2) = \frac{a_2}{2} \cdot t_2^2 + v_{\max} \cdot t_2$$

$$v(t_2) = a_2 \cdot t_2 + v_{\max} = 0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Der Floh wird vollständig gebremst.

① $v(t)$ nach t umstellen

$$0 = a_2 \cdot t_2 + v_{\max} \quad \rightarrow \quad t_2 = -\frac{v_{\max}}{a_2}$$

② Setze t in $s(t)$

$$s_2 = \frac{a_2}{2} \cdot \left(-\frac{v_{\max}}{a_2}\right)^2 + v_{\max} \cdot \left(-\frac{v_{\max}}{a_2}\right)$$

$$= \frac{v_{\max}^2}{2 \cdot a_2} - \frac{2 \cdot v_{\max}^2}{2 \cdot a_2} = -\frac{v_{\max}^2}{2 \cdot a_2}$$

$$a_2 = -\frac{v_{\max}^2}{2 \cdot s_2} = -\frac{\left(1{,}2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{2 \cdot 2{,}0 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}} = -360\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = -\,36{,}7\,g$$

11.3 Übungen

Übungsaufgabe 1

Eine Forschungsrakete startet senkrecht mit der Beschleunigung $30\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Nach 15 s schalten sich die Triebwerke ab. Die Rakete steigt danach noch eine Weile weiter und fällt schließlich zur Erde zurück. Geplant ist eine Messung in einer Höhe von 15 km über dem Boden. Der Luftwiderstand wird vernachlässigt.

a) Prüfen Sie, ob die Rakete diese Höhe erreicht. Geben Sie an, was geändert werden könnte, falls sie die Höhe nicht erreicht.

b) Bestimmen Sie die Gesamtflugzeit der Rakete.

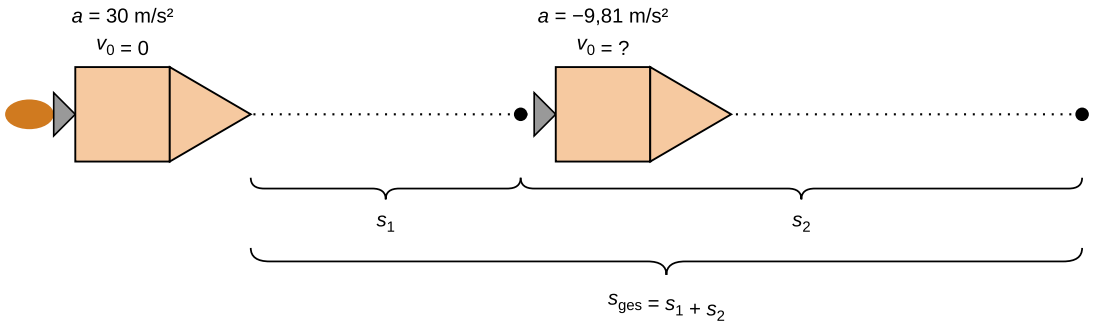
c) Berechnen Sie die Geschwindigkeit, mit der die Rakete auf dem Boden auftrifft.

Lösung zu Übungsaufgabe 1

geg.: $a_1 = 30\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, $t_1 = 15\,\mathrm{s}$

ges.: a) $s_{\mathrm{ges}} \geq 15\,\mathrm{km}$? b) t_{ges} c) v_{f}

Lös.:



Zu a): Bewegungsabschnitt 1 (mit Triebwerk):

$$s_1(t_1) = \frac{a_1}{2} \cdot t_1^2 = \frac{30\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{2} \cdot (15\,\mathrm{s})^2 = 3375\,\mathrm{m}$$

$$v_1(t_1) = a_1 \cdot t_1 = 30\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 15\,\mathrm{s} = 450\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Bewegungsabschnitt 2 (ohne Triebwerk) mit $v_0 = 450\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ und $s_0 = 0$:

$$s_2(t) = -\frac{g}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t$$

$$v(t) = -g \cdot t + v_0$$

Am höchsten Punkt ist die Geschwindigkeit null:

$$0 = -g \cdot t_2 + v_0 \quad \rightarrow \quad t_2 = \frac{v_0}{g} = \frac{450\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 45{,}9\,\mathrm{s}$$

$$s_2 = -\frac{g}{2} \cdot t_2^2 + v_0 \cdot t_2 = \frac{v_0^2}{2 \cdot g} = \frac{\left(450\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{2 \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 10\,321\,\mathrm{m}$$

$$s_{\mathrm{ges}} = s_1 + s_2 = 3375\,\mathrm{m} + 10\,321\,\mathrm{m} = 13\,696\,\mathrm{m} \approx 13{,}7\,\mathrm{km}$$

Die Rakete erreicht die Höhe von 15 km nicht. Dafür müssten die Triebwerke länger brennen oder die Beschleunigung müsste größer sein.

Zu b): Bewegungsabschnitt 3 (freier Fall aus der Höhe s_{ges}):

$$0 = -\frac{g}{2} \cdot t_3^2 + s_{\mathrm{ges}} \quad \rightarrow \quad t_3 = \sqrt{\frac{2 \cdot s_{\mathrm{ges}}}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 13\,696\,\mathrm{m}}{9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} = 52{,}8\,\mathrm{s}$$

$$t_{\mathrm{ges}} = t_1 + t_2 + t_3 = 15\,\mathrm{s} + 45{,}9\,\mathrm{s} + 52{,}8\,\mathrm{s} = 113{,}7\,\mathrm{s} \approx 114\,\mathrm{s}$$

Zu c):

$$v_{\mathrm{f}} = -g \cdot t_3 = -\,9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 52{,}8\,\mathrm{s} = -518\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Die Rakete trifft mit dem Geschwindigkeitsbetrag $518\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ auf dem Boden auf.

Größe	Ergebnis
s_{ges}	$13{,}7\,\mathrm{km}$ (15 km werden nicht erreicht)
t_{ges}	$114\,\mathrm{s}$
$\lvert\, v_{\mathrm{f}} \,\rvert$	$518\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

12 Zusammengesetzte Bewegungen

- Um komplexe Bewegungen zu beschreiben, verwendet man besondere Prinzipien. Diese ermöglichen es, eine komplexe Bewegung in mehrere einfache Bewegungen zu zerlegen.

12.1 Das Relativitätsprinzip

„Die Beschreibung einer Bewegung hängt immer vom Bezugssystem ab. Die Wahl des Bezugssystems legt fest, ob eine Bewegung zusammengesetzt ist oder nicht."

Beispiele:

① Eine Person läuft in einem fahrenden Zug.

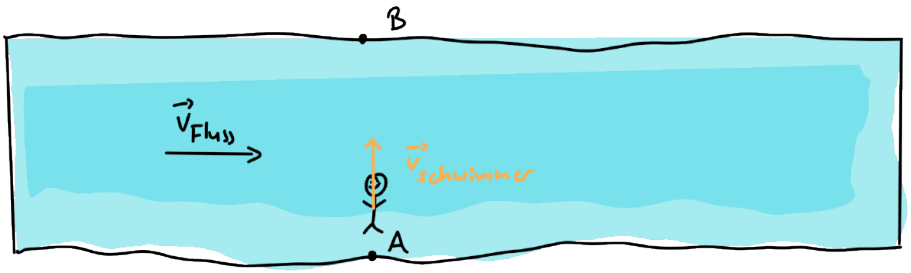
Bezugssystem Bahnsteig: Bewegung des Zuges + Bewegung der Person

$$\vec{v} = \vec{v}_{\text{Zug}} + \vec{v}_{\text{Person}}$$

Bezugssystem Zug: Bewegung der Person

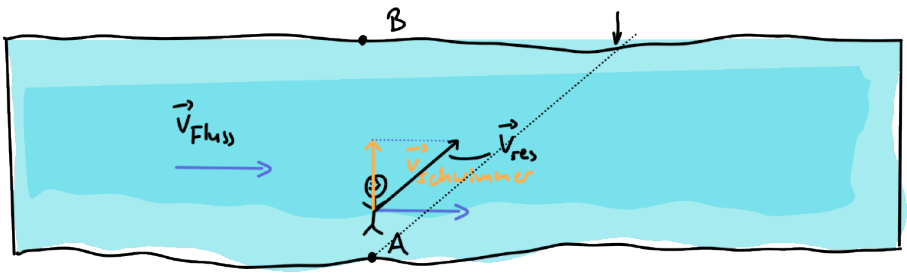
$$\vec{v} = \vec{v}_{\text{Person}}$$

② Bewegung eines Schwimmers in einem Fluss



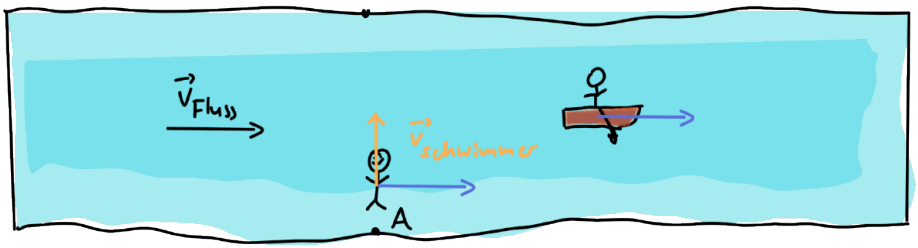
Ein Schwimmer hat eine Geschwindigkeit senkrecht zur Strömungsgeschwindigkeit des Flusses.

Bezugssystem: äußerer Beobachter (von oben)



→ Der Schwimmer bewegt sich mit seiner eigenen Geschwindigkeit und der Geschwindigkeit des Flusses.

Bezugssystem: Beobachter im Fluss



→ Für die Person im Boot bewegt sich der Schwimmer senkrecht zur Bewegungsrichtung des Bootes.

12.2 Das Unabhängigkeitsprinzip / das Superpositionsprinzip

„Die Teilbewegungen einer zusammengesetzten Bewegung sind unabhängig voneinander. Sie überlagern sich zur zusammengesetzten Bewegung.“ (Superposition)

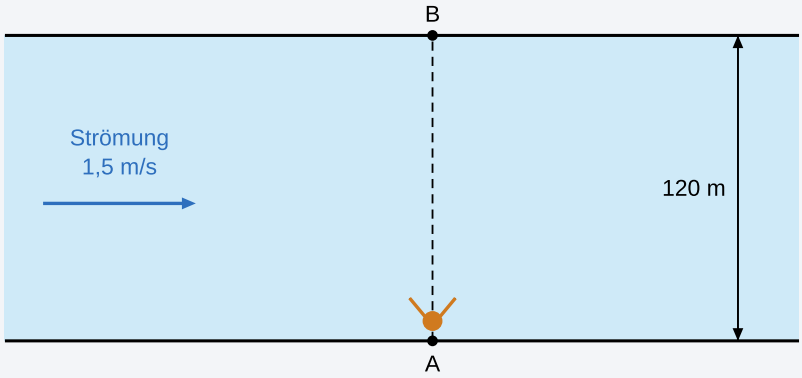
Beispiel: Zwei Kugeln, die aus gleicher Höhe fallen gelassen werden, treffen gleichzeitig auf dem Boden auf, unabhängig davon, wie sich die Kugeln in horizontaler Richtung bewegen.

→ Wir dürfen die Bewegungen in x- und y-Richtung getrennt voneinander betrachten.

12.3 Übungen

Übungsaufgabe 1

Ein Fluss ist 120 m breit. Seine Ufer sind geradlinig und parallel. Die Strömung hat die Geschwindigkeit $1{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ und verläuft parallel zu den Ufern. Eine Schwimmerin erreicht in ruhigem Wasser höchstens die Geschwindigkeit $1{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Sie möchte den Fluss auf direktem Weg von A nach B überqueren. Die Strecke AB verläuft senkrecht zu den Ufern.



Entscheiden und begründen Sie, ob die Schwimmerin

a) senkrecht zum Ufer genau auf B zu schwimmen sollte,

b) unter 60° zur Strecke AB stromaufwärts schwimmen sollte,

c) unter 30° zur Strecke AB stromaufwärts schwimmen sollte,

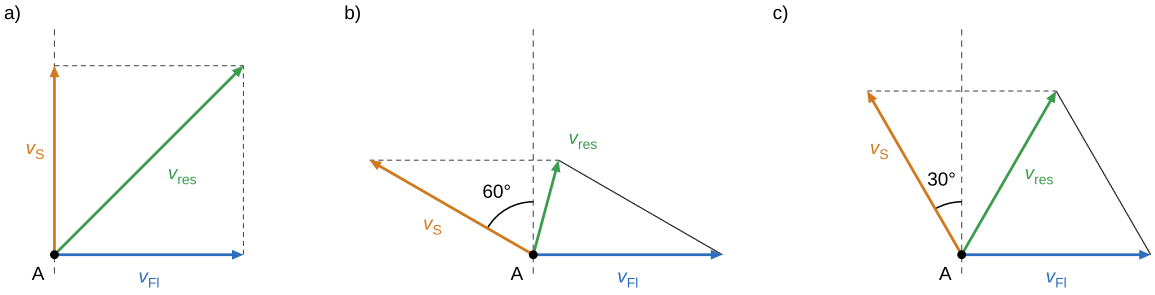
d) den direkten Weg aufgeben sollte, weil ihre Geschwindigkeit nicht ausreicht.

Lösung zu Übungsaufgabe 1

geg.: $v_{\mathrm{Fl}} = 1{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $v_{\mathrm{S}} = 1{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

Lös.: Für einen Beobachter am Ufer gilt:

$$\vec{v}_{\mathrm{res}} = \vec{v}_{\mathrm{S}} + \vec{v}_{\mathrm{Fl}}$$



Die Schwimmerin bleibt nur dann auf der Strecke AB, wenn $\vec{v}_{\mathrm{res}}$ senkrecht zum Ufer zeigt. Schwimmt sie unter dem Winkel θ zur Strecke AB stromaufwärts, muss für die Komponenten parallel zum Ufer gelten:

$$v_\mathrm{S} \cdot \sin\theta - v_\mathrm{Fl} = 0 \quad \rightarrow \quad \sin\theta = \frac{v_\mathrm{Fl}}{v_\mathrm{S}} = \frac{1{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{1{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 1 \quad \rightarrow \quad \theta = 90^\circ$$

Sie müsste also genau gegen die Strömung schwimmen. Dann ist ihre Geschwindigkeit senkrecht zum Ufer $v_\mathrm{S} \cdot \cos(90^\circ) = 0$, sie kommt nicht voran.

a) Nein. Sie wird mit $1{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ stromabwärts abgetrieben.

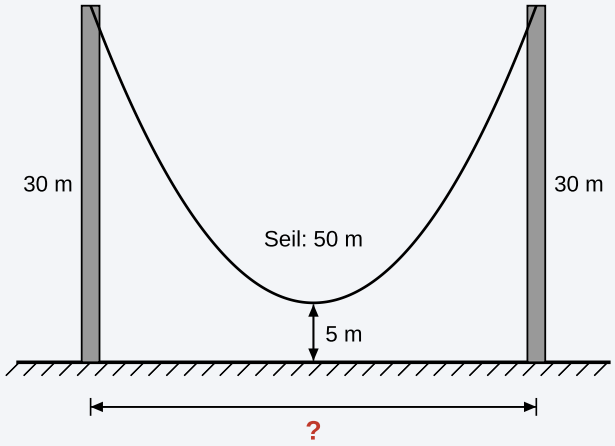
b) Nein. Parallel zum Ufer bleibt $1{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 1{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \sin(60^\circ) = 0{,}20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ stromabwärts.

c) Nein. Parallel zum Ufer bleibt $1{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 1{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \sin(30^\circ) = 0{,}75\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ stromabwärts.

d) Ja. Auf direktem Weg kann sie B nicht erreichen, weil ihre Geschwindigkeit nicht größer ist als die Strömungsgeschwindigkeit.

Übungsaufgabe 2 (vergleichbare Aufgabe)

Zwischen den Spitzen zweier 30 m hoher Masten hängt ein 50 m langes Seil. Der tiefste Punkt des Seils liegt 5 m über dem Boden.



Bestimmen Sie den Abstand der beiden Masten.

Lösung zu Übungsaufgabe 2

Der tiefste Punkt des Seils liegt $30\,\mathrm{m} - 5\,\mathrm{m} = 25\,\mathrm{m}$ unter den Mastspitzen. Das Seil ist $50\,\mathrm{m} = 2 \cdot 25\,\mathrm{m}$ lang. Es reicht also genau, um 25 m senkrecht nach unten und 25 m senkrecht nach oben zu hängen.

Der Abstand der beiden Masten beträgt 0 m. Die Abbildung führt in die Irre.

Wie in Übungsaufgabe 1 gilt: Die gegebenen Größen lassen die erwartete Lösung nicht zu.

13 Wurfbewegungen

- Wurfbewegungen oder Würfe sind eine spezielle Art der zusammengesetzten Bewegung.
- Wir lernen 3 verschiedene Wurfbewegungen kennen.

13.1 Der waagerechte Wurf

Teilbewegungen:

- x-Richtung: geradlinige gleichförmige Bewegung
- y-Richtung: freier Fall

Rezept: Zusammengesetzte Bewegungen

① Stelle alle Bewegungsgleichungen auf:

1. Teilbewegung:

$$x(t) = v_x \cdot t + x_0$$
$$v_x(t) = v_0$$

$x(t)$: s in x-Richtung. Die Anfangsgeschwindigkeit zeigt in x-Richtung.

2. Teilbewegung:

$$y(t) = -\frac{g}{2} \cdot t^2 + y_0$$
$$v_y(t) = -g \cdot t$$

→ Die Funktion der Wurfparabel $y(x)$

②.1 Stelle $x(t)$ nach t um:

$$x(t) = v_0 \cdot t \quad \rightarrow \quad t = \frac{x}{v_0}$$

②.2 Setze dieses t in $y(t)$ ein:

$$y(t) = -\frac{g}{2} \cdot t^2 + y_0$$
$$y(x) = -\frac{g}{2} \cdot \left(\frac{x}{v_0}\right)^2 + y_0$$

Wurfparabel des waagerechten Wurfs:

$$y(x) = -\frac{g}{2 \cdot v_0^2} \cdot x^2 + y_0$$

13.2 Der senkrechte Wurf

Teilbewegungen:

- ① y-Richtung: freier Fall
- ② y-Richtung: geradlinige gleichförmige Bewegung

Zu ①:

$$y_1(t) = -\frac{g}{2} \cdot t^2$$
$$v_{y1}(t) = -g \cdot t$$

Zu ②:

$$y_2(t) = v_0 \cdot t$$
$$v_{y2} = v_0$$

Zusammen:

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_0$$

Freier Fall mit Anfangsgeschwindigkeit:

$$y(t) = -\frac{g}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t + y_0$$

$$v_y(t) = v_{y1} + v_{y2} = -g \cdot t + v_0$$

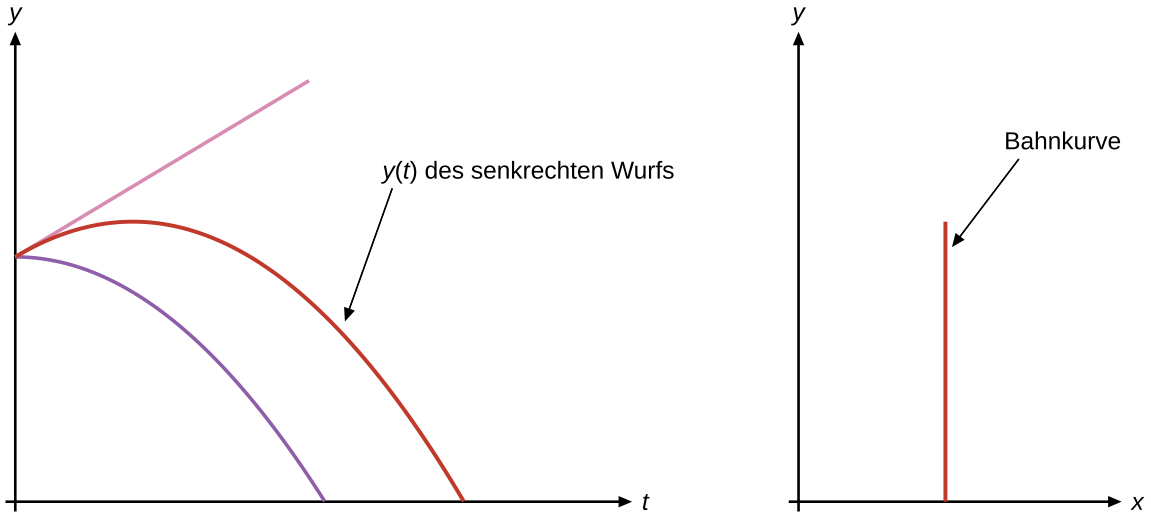
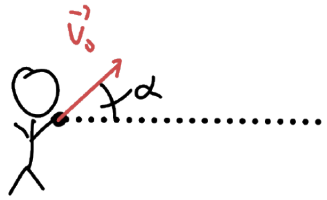


Abbildung 22: y(t)-Diagramm und Bahnkurve des senkrechten Wurfs. Die beiden Teilbewegungen sind von der Anfangshöhe y_0 aus eingezeichnet: $y_0 + y_1(t)$ und $y_0 + y_2(t)$.

13.3 Der schiefe Wurf / der schräge Wurf



Teilbewegungen:

- x-Richtung: geradlinige gleichförmige Bewegung
- y-Richtung: senkrechter Wurf (geradlinige gleichmäßig beschleunigte Bewegung)

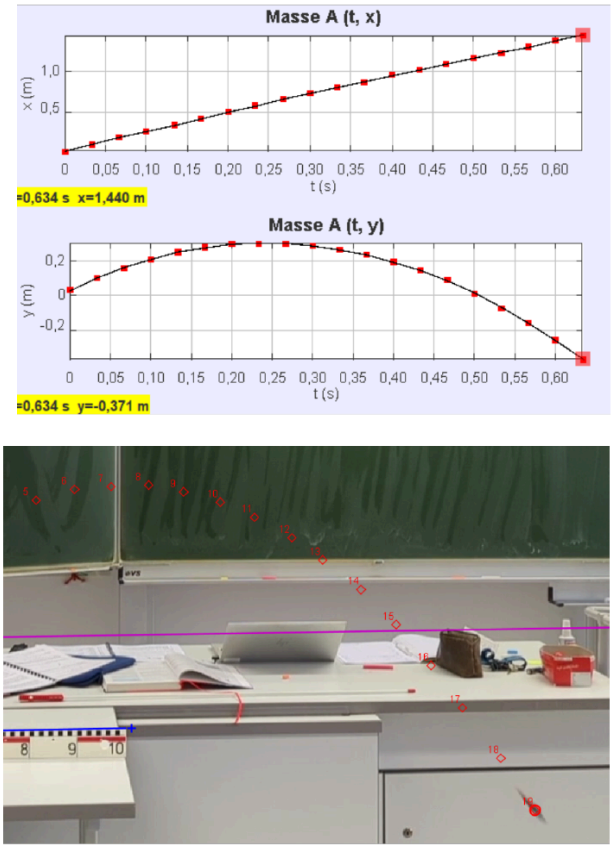
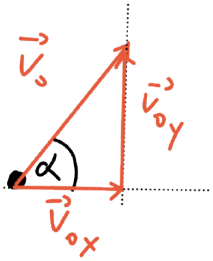


Abbildung 23: Messung im Unterricht: x(t) und y(t) eines schräg geworfenen Körpers

13.3.1 Bewegungsgleichungen



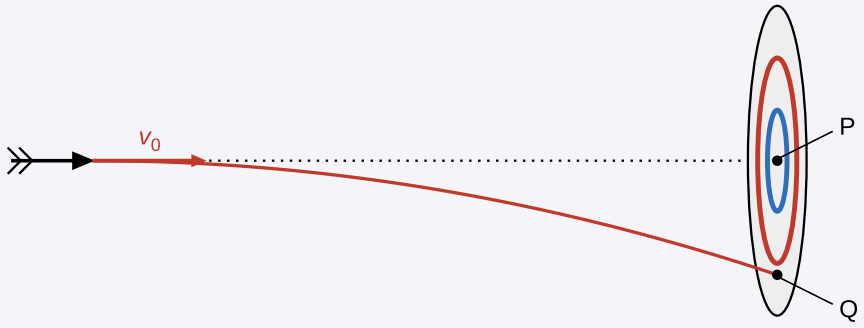
$$v_{0x} = v_0 \cdot \cos\alpha \qquad v_{0y} = v_0 \cdot \sin\alpha$$

$$\begin{aligned} x(t) &= v_{0x} \cdot t + x_0 \\ &= v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t + x_0 \\ y(t) &= -\frac{g}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin\alpha \cdot t + y_0 \\ v_y(t) &= -g \cdot t + v_0 \cdot \sin\alpha \end{aligned}$$

13.4 Übungen

Übungsaufgabe 1

Ein Pfeil wird mit der Anfangsgeschwindigkeit $25\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ waagerecht auf den Punkt P geschossen, die Mitte einer Zielscheibe. Er trifft nach 0,24 s im Punkt Q auf, der senkrecht unter P liegt.



a) Berechnen Sie den Abstand $\overline{\mathrm{PQ}}$.

b) Berechnen Sie, wie weit der Pfeil beim Abschuss von der Zielscheibe entfernt ist.

Lösung zu Übungsaufgabe 1

geg.: $v_0 = 25\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $t = 0{,}24\,\mathrm{s}$

ges.: $\overline{\mathrm{PQ}}$, x

Lös.:

Zu a):

$$y(t) = -\frac{g}{2} \cdot t^2$$

$$y(0{,}24\,\mathrm{s}) = -\frac{9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{2} \cdot (0{,}24\,\mathrm{s})^2 = -\,0{,}28\,\mathrm{m}$$

Interpretation: Der Pfeil fällt 28 cm nach unten. Also ist $\overline{\mathrm{PQ}} = 0{,}28\,\mathrm{m}$.

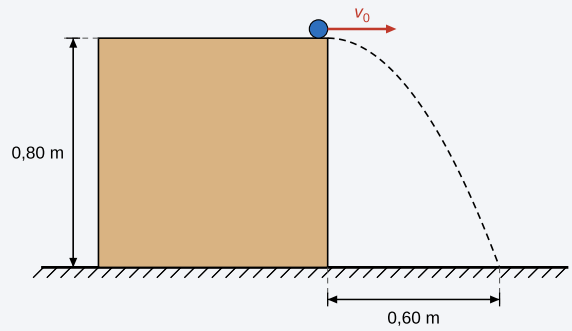
Zu b):

$$x(t) = v_0 \cdot t$$

$$x(0{,}24\,\mathrm{s}) = 25\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 0{,}24\,\mathrm{s} = 6{,}0\,\mathrm{m}$$

Übungsaufgabe 2

Eine Murmel rollt waagerecht über die Kante einer 0,80 m hohen Werkbank. Sie trifft den Boden an einem Punkt, der 0,60 m von der Kante entfernt liegt.



a) Berechnen Sie, wie lange die Murmel in der Luft ist.

b) Berechnen Sie die Geschwindigkeit, mit der sie die Werkbank verlässt.

Lösung zu Übungsaufgabe 2

geg.: $h = 0{,}80\,\mathrm{m} = y_0$, $x_{\max} = 0{,}60\,\mathrm{m}$

ges.: t_f, v_0

Lös.:

Zu a):

$$y(t) = -\frac{g}{2} \cdot t^2 + h$$

$$y(t_\mathrm{f}) = 0 = -\frac{g}{2} \cdot t_\mathrm{f}^2 + h$$

$$h = \frac{g}{2} \cdot t_\mathrm{f}^2$$

$$t_\mathrm{f}^2 = \frac{2 \cdot h}{g}$$

$$t_\mathrm{f} = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}80\,\mathrm{m}}{9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} = 0{,}404\,\mathrm{s} \approx 0{,}40\,\mathrm{s}$$

Zu b):

$$x(t_\mathrm{f}) = v_0 \cdot t_\mathrm{f} \quad \rightarrow \quad v_0 = \frac{x_{\max}}{t_\mathrm{f}} = \frac{0{,}60\,\mathrm{m}}{0{,}404\,\mathrm{s}} = 1{,}49\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Übungsaufgabe 3

Zeigen Sie, dass die Wurfparabel des schiefen Wurfs mit der Funktion

$$y(x) = -\frac{g}{2 \cdot \cos^2\alpha \cdot v_0^2} \cdot x^2 + \tan(\alpha) \cdot x + y_0$$

dargestellt werden kann.

Lösung zu Übungsaufgabe 3

① $x(t)$ nach t umstellen (mit $x_0 = 0$):

$$x(t) = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t \quad \rightarrow \quad t = \frac{x}{v_0 \cdot \cos\alpha}$$

② t in $y(t)$ einsetzen

$$y(t) = -\frac{g}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin\alpha \cdot t + y_0$$

$$y(x) = -\frac{g}{2} \cdot \left(\frac{x}{v_0 \cdot \cos\alpha}\right)^2 + v_0 \cdot \sin\alpha \cdot \frac{x}{v_0 \cdot \cos\alpha} + y_0$$

③ Kürzen und vereinfachen

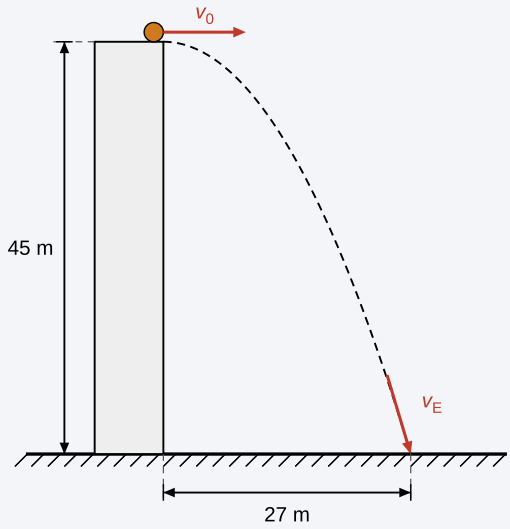
$$y(x) = -\frac{g}{2} \cdot \frac{x^2}{v_0^2 \cdot \cos^2\alpha} + \frac{v_0}{v_0} \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot x + y_0$$

$$= -\frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2\alpha} \cdot x^2 + \tan(\alpha) \cdot x + y_0$$

13.5 Weitere Übungsaufgaben

Übungsaufgabe 4

Ein Ball wird von einem 45 m hohen Aussichtsturm horizontal abgeworfen. Er erreicht den Erdboden in einem Abstand von 27 m vom Fuß des Turms.



1. Berechnen Sie die Anfangsgeschwindigkeit des Balls.
2. Berechnen Sie die Endgeschwindigkeit des Balls.

Lösung zu Übungsaufgabe 4

geg.: $y_0 = 45\,\text{m}$, $x_{\max} = 27\,\text{m}$

ges.: v_0, v_E

Lös.:

Zu 1: Fallzeit aus der Bewegung in y-Richtung:

$$y(t_f) = 0 = -\frac{g}{2} \cdot t_f^2 + y_0 \quad \rightarrow \quad t_f = \sqrt{\frac{2 \cdot y_0}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 45\,\text{m}}{9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 3{,}03\,\text{s}$$

$$x(t_f) = v_0 \cdot t_f \quad \rightarrow \quad v_0 = \frac{x_{\max}}{t_f} = \frac{27\,\text{m}}{3{,}03\,\text{s}} = 8{,}91\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

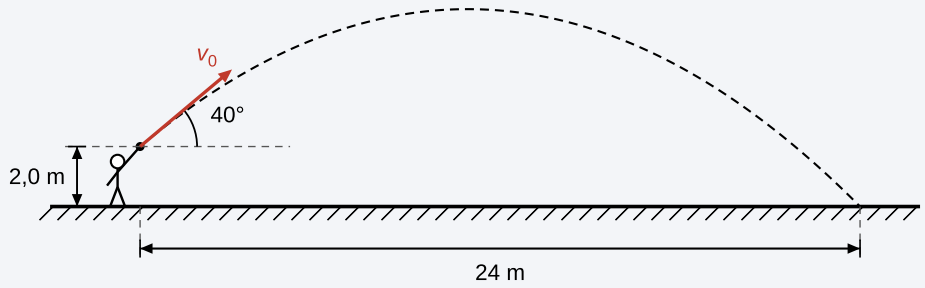
Zu 2: Die Geschwindigkeit beim Auftreffen hat die Komponenten

$$v_x = v_0 = 8{,}91\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad v_y(t_\mathrm{f}) = -g \cdot t_\mathrm{f} = -\,9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 3{,}03\,\mathrm{s} = -\,29{,}7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$v_\mathrm{E} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(8{,}91\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 + \left(29{,}7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2} = 31{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Übungsaufgabe 5

Eine Sportlerin wirft einen Ball unter einem Winkel von 40° ab und erreicht eine Weite von 24 m. Der Abwurfpunkt des Balls liegt 2,0 m über der Erdoberfläche. Der Luftwiderstand wird vernachlässigt.



1. Berechnen Sie die Anfangsgeschwindigkeit des Balls.
2. Berechnen Sie, mit welcher Geschwindigkeit und unter welchem Winkel der Ball aufschlägt.

Lösung zu Übungsaufgabe 5

geg.: $\alpha = 40°$, $x_\mathrm{W} = 24\,\mathrm{m}$, $y_0 = 2{,}0\,\mathrm{m}$

ges.: v_0, v_E, β

Lös.:

Zu 1: Am Auftreffpunkt gilt $y(x_\mathrm{W}) = 0$:

$$0 = -\frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2\alpha} \cdot x_\mathrm{W}^2 + \tan(\alpha) \cdot x_\mathrm{W} + y_0$$

$$\frac{g \cdot x_\mathrm{W}^2}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2\alpha} = \tan(\alpha) \cdot x_\mathrm{W} + y_0$$

$$v_0^2 = \frac{g \cdot x_\mathrm{W}^2}{2 \cdot \cos^2\alpha \cdot (\tan(\alpha) \cdot x_\mathrm{W} + y_0)}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (24\,\mathrm{m})^2}{2 \cdot \cos^2(40°) \cdot (\tan(40°) \cdot 24\,\mathrm{m} + 2{,}0\,\mathrm{m})}} = 14{,}7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Zu 2: Die x-Komponente der Geschwindigkeit bleibt konstant:

$$v_x = v_0 \cdot \cos\alpha = 14{,}7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \cos(40°) = 11{,}3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Flugzeit:

$$x(t) = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t \quad \rightarrow \quad t_\mathrm{f} = \frac{x_\mathrm{W}}{v_0 \cdot \cos\alpha} = \frac{24\,\mathrm{m}}{11{,}3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 2{,}12\,\mathrm{s}$$

y-Komponente beim Aufschlag:

$$v_y(t_\mathrm{f}) = -g \cdot t_\mathrm{f} + v_0 \cdot \sin\alpha = -\,9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 2{,}12\,\mathrm{s} + 14{,}7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \sin(40°) = -\,11{,}4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$v_\mathrm{E} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(11{,}3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 + \left(11{,}4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2} = 16{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

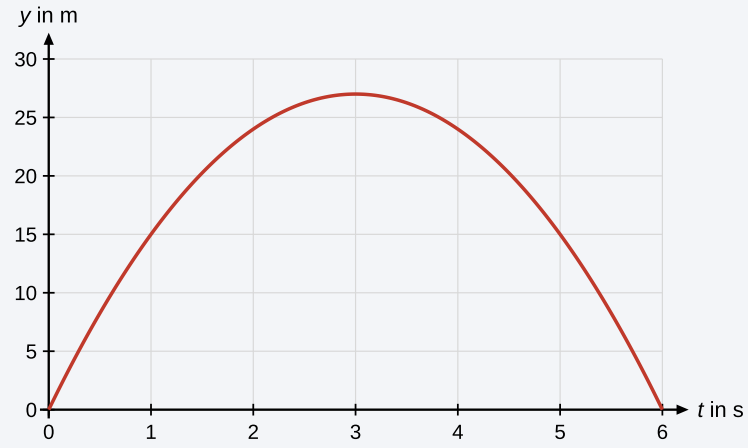
$$\tan\beta = \frac{|\,v_y\,|}{v_x} \quad \rightarrow \quad \beta = \arctan\left(\frac{11{,}4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{11{,}3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}\right) = 45{,}2^\circ$$

Der Ball schlägt mit $16{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ unter einem Winkel von 45,2° zur Horizontalen auf.

Größe	Ergebnis
v_0	$14{,}7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
v_E	$16{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
β	$45{,}2^\circ$

Übungsaufgabe 6

Auf einem fremden Planeten wird ein Ball von der Oberfläche senkrecht nach oben geworfen. Das Diagramm zeigt die Höhe y des Balls über dem Abwurfpunkt in Abhängigkeit von der Zeit t. Der Ball wird zum Zeitpunkt $t = 0$ geworfen.



Bestimmen Sie

a) den Betrag der Fallbeschleunigung auf diesem Planeten,

b) die Anfangsgeschwindigkeit des Balls.

Lösung zu Übungsaufgabe 6

geg.: aus dem Diagramm: Steigzeit $t_\mathrm{s} = 3\,\mathrm{s}$, größte Höhe $y_\mathrm{max} = 27\,\mathrm{m}$

ges.: g_P, v_0

Lös.: Für den senkrechten Wurf mit $y_0 = 0$ gilt:

$$y(t) = -\frac{g_\mathrm{P}}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t$$

$$v_y(t) = -g_\mathrm{P} \cdot t + v_0$$

Am höchsten Punkt ist die Geschwindigkeit null:

$$0 = -g_\mathrm{P} \cdot t_\mathrm{s} + v_0 \quad \rightarrow \quad v_0 = g_\mathrm{P} \cdot t_\mathrm{s}$$

Einsetzen in $y(t_\mathrm{s}) = y_\mathrm{max}$:

$$y_{\max} = -\frac{g_\mathrm{P}}{2} \cdot t_\mathrm{s}^2 + g_\mathrm{P} \cdot t_\mathrm{s}^2 = \frac{g_\mathrm{P}}{2} \cdot t_\mathrm{s}^2$$

Zu a):

$$g_\mathrm{P} = \frac{2 \cdot y_{\max}}{t_\mathrm{s}^2} = \frac{2 \cdot 27\,\mathrm{m}}{(3\,\mathrm{s})^2} = 6{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Zu b):

$$v_0 = g_\mathrm{P} \cdot t_\mathrm{s} = 6{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 3\,\mathrm{s} = 18\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Übungsaufgabe 7

Bei einem Wettkampf springt eine Weitspringerin 6,90 m weit. Ihre Geschwindigkeit beim Absprung beträgt $9{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Der Luftwiderstand wird vernachlässigt.

Berechnen Sie, um wie viel ihre Sprungweite kleiner ist als die maximal mögliche horizontale Reichweite eines Teilchens, das mit dem gleichen Geschwindigkeitsbetrag geworfen wird.

Lösung zu Übungsaufgabe 7

geg.: $v_0 = 9{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $w = 6{,}90\,\mathrm{m}$, $g = 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

ges.: Δx

Lös.: Wurfweite aus der Wurfparabel mit $y_0 = 0$:

$$y(x) = -\frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2\alpha} \cdot x^2 + \tan(\alpha) \cdot x = 0$$

$$-\frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2\alpha} \cdot x + \tan\alpha = 0$$

$$x = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{2 \cdot \cos^2\alpha \cdot v_0^2}{g} = \frac{2 \cdot v_0^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{g}$$

Die Wurfweite ist maximal, wenn $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ maximal ist. Die Ableitung nach α muss null sein:

$$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos\alpha = \sin\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 45^\circ$$

$$x_{\max} = \frac{2 \cdot v_0^2 \cdot \sin(45^\circ) \cdot \cos(45^\circ)}{g} = \frac{v_0^2}{g} = \frac{\left(9{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 8{,}26\,\mathrm{m}$$

$$\Delta x = x_{\max} - w = 8{,}26\,\mathrm{m} - 6{,}90\,\mathrm{m} = 1{,}36\,\mathrm{m}$$

14 Die Newtonschen Axiome

Die Dynamik untersucht, wie sich Kräfte auf den Bewegungszustand eines Körpers auswirken.

14.1 Die Newtonschen Axiome

Axiom: Die Grundlage einer Theorie, die ohne Deduktion oder Beweis als richtig angenommen wird.

Das erste Newtonsche Axiom:

Das Trägheitsprinzip: Ein Körper verharrt (bleibt) im Zustand der Ruhe oder bewegt sich geradlinig gleichförmig, solange die Summe aller auf ihn wirkenden Kräfte gleich null ist.

Das zweite Newtonsche Axiom:

Das Aktionsprinzip: Wenn eine Kraft auf einen Körper einwirkt, so wird er in Richtung dieser Krafteinwirkung beschleunigt. Diese Beschleunigung ist direkt proportional zur Kraft:

$$\vec{F} \sim \vec{a}$$

Die Proportionalitätskonstante heißt (träge) Masse des Körpers.

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$[m] = 1\,\mathrm{kg} \rightarrow 1\,\mathrm{g} = 1 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg},\ 1\,\mathrm{mg} = 1 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{g},\ 1\,\mu\mathrm{g} = 1 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{mg},\ \ldots$

$1 \cdot 10^{3}\,\mathrm{kg} = 1\,\mathrm{t}$ (1 (metrische) Tonne)

Das dritte Newtonsche Axiom:

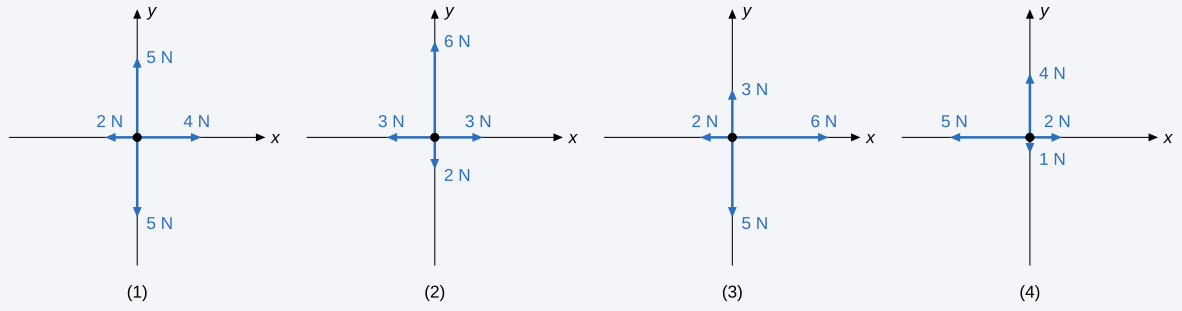
Das Wechselwirkungsprinzip: Übt ein Körper A eine Kraft auf Körper B aus, so übt B eine gleich große entgegengesetzte Kraft auf A aus.

Die Gleichung $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ bezeichnet man auch als Grundgesetz der Mechanik (Dynamik).

14.2 Übungen

Übungsaufgabe 1

Die Abbildung zeigt für vier Situationen die Kräfte, die auf einen Körper wirken. Der Körper wird von oben betrachtet und liegt auf einem reibungsfreien Boden.



1. Geben Sie an, in welchen Situationen die Beschleunigung $\vec{a}$ des Körpers eine x-Komponente besitzt.
2. Geben Sie an, in welchen Situationen die Beschleunigung $\vec{a}$ eine y-Komponente besitzt.
3. Geben Sie für jede Situation die Richtung von $\vec{a}$ an. Nennen Sie dazu einen Quadranten oder eine Richtung entlang einer Achse.

Diese Aufgabe lässt sich im Kopf lösen.

Lösung zu Übungsaufgabe 1

Lös.: Nach dem Aktionsprinzip gilt $\vec{a} = \frac{\vec{F}_{\text{res}}}{m}$. Die Beschleunigung hat deshalb dieselbe Richtung wie die resultierende Kraft.

Situation	$F_{\text{res},x}$	$F_{\text{res},y}$	Richtung von $\vec{a}$
(1)	$4\,\text{N} - 2\,\text{N} = 2\,\text{N}$	$5\,\text{N} - 5\,\text{N} = 0$	positive x-Richtung
(2)	$3\,\text{N} - 3\,\text{N} = 0$	$6\,\text{N} - 2\,\text{N} = 4\,\text{N}$	positive y-Richtung
(3)	$6\,\text{N} - 2\,\text{N} = 4\,\text{N}$	$3\,\text{N} - 5\,\text{N} = -2\,\text{N}$	4. Quadrant
(4)	$2\,\text{N} - 5\,\text{N} = -3\,\text{N}$	$4\,\text{N} - 1\,\text{N} = 3\,\text{N}$	2. Quadrant

Zu 1: Eine x-Komponente besitzt $\vec{a}$ in den Situationen (1), (3) und (4).

Zu 2: Eine y-Komponente besitzt $\vec{a}$ in den Situationen (2), (3) und (4).

Zu 3: Siehe letzte Spalte der Tabelle.

Übungsaufgabe 2

Ein Körper mit der Masse 4,0 kg kann sich auf einer reibungsfreien Eisfläche bewegen. Auf ihn wirken nur zwei waagerechte Kräfte. Die erste Kraft beträgt 12 N und wirkt genau nach Osten. Die zweite Kraft beträgt 10 N und wirkt 50° nördlich von Westen.

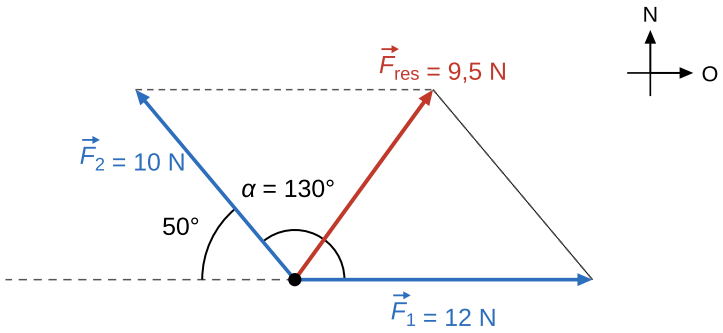
Berechnen Sie den Betrag der Beschleunigung des Körpers.

Lösung zu Übungsaufgabe 2

geg.: $m = 4{,}0\,\text{kg}$, $F_1 = 12\,\text{N}$ (nach Osten), $F_2 = 10\,\text{N}$ (50° nördlich von Westen)

ges.: a

Lös.:



Der Winkel zwischen den beiden Kräften beträgt $\alpha = 180° - 50° = 130°$.

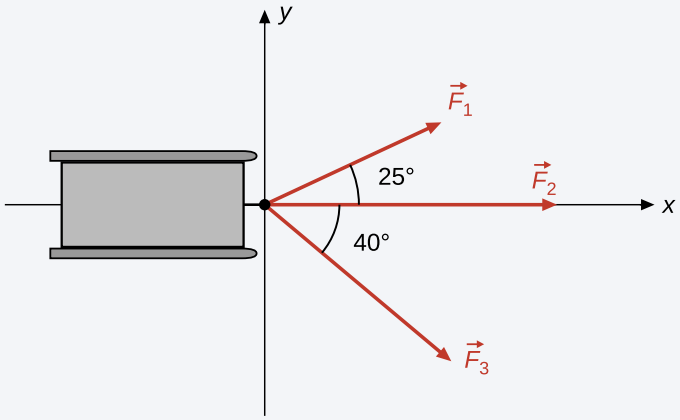
$$F_{\text{res}} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos\alpha}$$

$$F_{\text{res}} = \sqrt{(12\,\text{N})^2 + (10\,\text{N})^2 + 2 \cdot 12\,\text{N} \cdot 10\,\text{N} \cdot \cos(130°)} = 9{,}5\,\text{N}$$

$$a = \frac{F_{\text{res}}}{m} = \frac{9{,}5\,\text{N}}{4{,}0\,\text{kg}} = 2{,}4\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Übungsaufgabe 3

Drei Schlittenhunde ziehen einen beladenen Schlitten mit der Gesamtmasse 150 kg über eine reibungsfreie Eisfläche. Die Abbildung zeigt die drei Zugkräfte von oben. Es gilt: $F_1 = 40\,\mathrm{N}$, $F_2 = 60\,\mathrm{N}$, $F_3 = 50\,\mathrm{N}$.



Berechnen Sie den Betrag der Beschleunigung des Schlittens.

Lösung zu Übungsaufgabe 3

geg.: $m = 150\,\mathrm{kg}$, $F_1 = 40\,\mathrm{N}$, $F_2 = 60\,\mathrm{N}$, $F_3 = 50\,\mathrm{N}$, $\theta_1 = 25°$, $\theta_3 = 40°$

ges.: a

Lös.:

$$F_{\mathrm{res},x} = F_1 \cdot \cos\theta_1 + F_2 + F_3 \cdot \cos\theta_3 = 40\,\mathrm{N} \cdot \cos(25°) + 60\,\mathrm{N} + 50\,\mathrm{N} \cdot \cos(40°) = 134{,}6\,\mathrm{N}$$

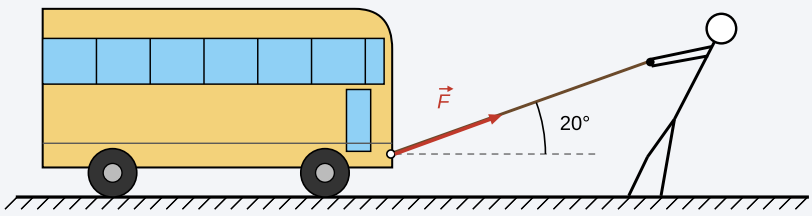
$$F_{\mathrm{res},y} = F_1 \cdot \sin\theta_1 - F_3 \cdot \sin\theta_3 = 40\,\mathrm{N} \cdot \sin(25°) - 50\,\mathrm{N} \cdot \sin(40°) = -\,15{,}2\,\mathrm{N}$$

$$F_{\mathrm{res}} = \sqrt{F_{\mathrm{res},x}^2 + F_{\mathrm{res},y}^2} = \sqrt{(134{,}6\,\mathrm{N})^2 + (-\,15{,}2\,\mathrm{N})^2} = 135{,}4\,\mathrm{N}$$

$$a = \frac{F_{\mathrm{res}}}{m} = \frac{135{,}4\,\mathrm{N}}{150\,\mathrm{kg}} = 0{,}90\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Übungsaufgabe 4

Ein Kraftsportler mit der Masse 110 kg zieht bei einem Wettkampf einen Reisebus mit einem Seil. Der Bus hat eine Gewichtskraft von 150 kN und steht am Anfang still. Der Sportler zieht mit einer konstanten Kraft, die dem 2,0-Fachen seiner eigenen Gewichtskraft entspricht. Das Seil verläuft unter einem Winkel von 20° oberhalb der Horizontalen. Der Sportler bewegt den Bus um 5,0 m.



Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Busses am Ende des Zuges. Vernachlässigen Sie alle bremsenden Kräfte.

Lösung zu Übungsaufgabe 4

geg.: $m_\mathrm{S} = 110\,\mathrm{kg}$, $F_\mathrm{G,B} = 150\,\mathrm{kN}$, $F = 2{,}0 \cdot m_\mathrm{S} \cdot g$, $\theta = 20°$, $s = 5{,}0\,\mathrm{m}$, $v_0 = 0$

ges.: v

Lös.:

Zugkraft und ihre waagerechte Komponente:

$$F = 2{,}0 \cdot m_\mathrm{S} \cdot g = 2{,}0 \cdot 110\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 2158\,\mathrm{N}$$

$$F_x = F \cdot \cos\theta = 2158\,\mathrm{N} \cdot \cos(20°) = 2028\,\mathrm{N}$$

Masse des Busses:

$$m_\mathrm{B} = \frac{F_\mathrm{G,B}}{g} = \frac{150\,000\,\mathrm{N}}{9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 15\,291\,\mathrm{kg}$$

Beschleunigung:

$$a = \frac{F_x}{m_\mathrm{B}} = \frac{2028\,\mathrm{N}}{15\,291\,\mathrm{kg}} = 0{,}133\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Für die gleichmäßig beschleunigte Bewegung aus der Ruhe gilt $s = \frac{a}{2} \cdot t^2$ und $v = a \cdot t$. Daraus folgt:

$$v = \sqrt{2 \cdot a \cdot s} = \sqrt{2 \cdot 0{,}133\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 5{,}0\,\mathrm{m}} = 1{,}15\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

15 Kräfte bei Bremsvorgängen

> **Beispielaufgabe**
>
> Eine Person fährt nicht angeschnallt mit ihrem PKW (Personenkraftwagen) mit einer konstanten Geschwindigkeit von $50\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Diese Person fährt gegen eine Mauer und kommt innerhalb von 0,15 s zum Stillstand.
>
> Berechnen Sie die Kraft, die auf die Person wirkt, wenn sie eine Masse 90 kg besitzt.

geg.: $v_0 = 50\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = \frac{50}{3{,}6}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $m = 90\,\mathrm{kg}$, $t_\mathrm{f} = 0{,}15\,\mathrm{s}$

ges.: F_Brems

Lös.:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-\frac{50}{3{,}6}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{0{,}15\,\mathrm{s}} = -\,92{,}6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

$$F_\mathrm{Brems} = m \cdot a = 90\,\mathrm{kg} \cdot \left(-\,92{,}6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right) = -8300\,\mathrm{N}$$

16 Reibungskräfte

- Reibungskräfte / Reibung hemmen die Bewegung eines Körpers.

→ Reibungskräfte können den Geschwindigkeitsbetrag nicht erhöhen.

Reibung im Alltag:

- beim Spazierengehen → Reibung zwischen Füßen und dem Boden
- beim Verschieben eines Möbelstücks
- beim Fahrradfahren → ① Reibung zwischen Reifen und Boden, ② Reibung zwischen der Luft und dem Fahrer

16.1 Wie entsteht Reibung?

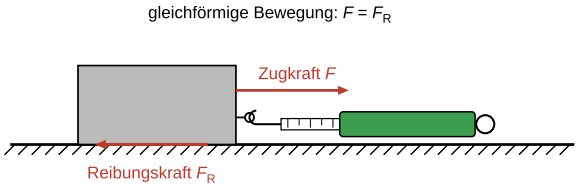


Abbildung 1: So kann die Gleitreibungskraft bestimmt werden.

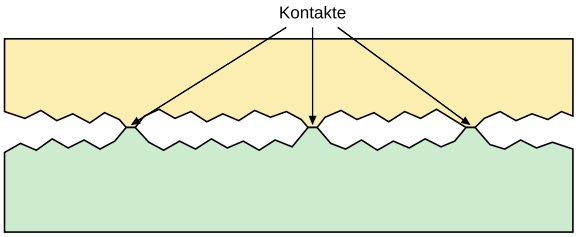


Abbildung 2: Reibung mikroskopisch

→ Selbst auf sehr glatt polierten Oberflächen gibt es mikroskopische Unebenheiten, die sich verzahnen und die Bewegung hemmen.

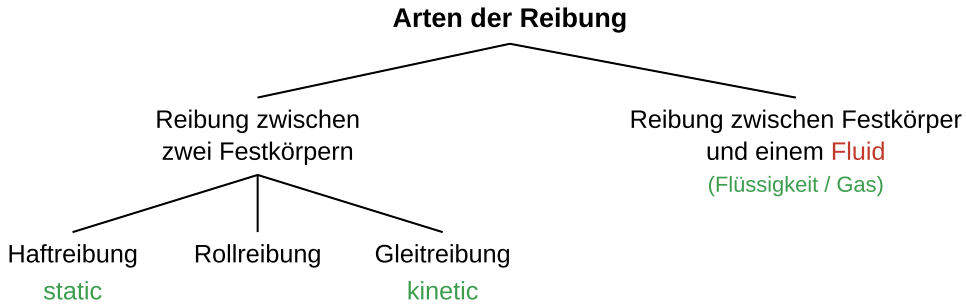
→ Wenn sich ein Körper durch Luft bewegt, stößt er mit den Luftmolekülen zusammen und wird dadurch gebremst.

16.2 Wie kann man Reibung vermeiden?

→ Mit einem Schmiermittel (Öl, Wachs) gewünscht

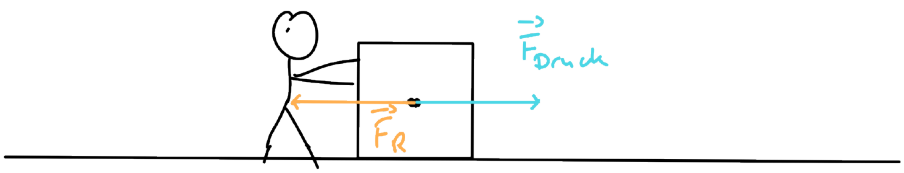
→ Mit Wasser (Aquaplaning) nicht gewünscht (normalerweise)

16.3 Arten der Reibung



16.4 Die Haftreibung

→ Die Haftreibung ist die Kraft, die auf einen ruhenden Körper wirkt, der in Bewegung versetzt werden soll.



→ Solange der Körper in Ruhe bleibt, hat die Haftreibungskraft den gleichen Betrag wie die Druckkraft.

→ Die Haftreibungskraft hat ein Maximum. Wenn dieses überwunden wird, setzt sich der Körper in Bewegung.

$$F_{\mathrm{HR,max}} = \mu_{\mathrm{HR}} \cdot F_{\mathrm{N}}$$

μ_{HR} – der Haftreibungskoeffizient (μ: my, gesprochen „mü“)

→ abhängig vom Material und der Oberflächenbeschaffenheit

Materialpaarung	Haftreibung	Gleitreibung
Stahl auf Stahl	0,2	0,1
Stahl auf Holz	0,5	0,4
Stahl auf Stein	0,8	0,7
Stein auf Holz	0,9	0,7
Leder auf Metall	0,6	0,4
Holz auf Holz	0,5	0,4
Stein auf Stein	1,0	0,9
Stahl auf Eis	0,03	0,01
Stahl auf Beton	0,35	0,20

→ Sobald sich der Körper nicht mehr in Ruhe befindet, wirkt auf ihn nicht mehr die Haftreibungskraft, sondern die Gleitreibungskraft.

16.5 Die Gleitreibungskraft

Die Gleitreibungskraft hemmt die Bewegung eines rutschenden Körpers. Sie ist unabhängig von der Geschwindigkeit des Körpers.

Sie kann mit der Gleichung

$$F_{\mathrm{GR}} = \mu_{\mathrm{GR}} \cdot F_{\mathrm{N}}$$

μ_{GR} – der Gleitreibungskoeffizient

berechnet werden.

→ allgemein gilt: $\mu_{\mathrm{GR}} \leq \mu_{\mathrm{HR}}, \mu_{\mathrm{GR}} > 0$

16.6 Die Rollreibungskraft

Die Rollreibungskraft tritt auf, wenn ein Körper über eine Oberfläche rollt. Auch diese Kraft ist unabhängig von der Geschwindigkeit.

Sie kann mit:

$$F_{\mathrm{RR}} = \mu_{\mathrm{RR}} \cdot F_{\mathrm{N}}$$

berechnet werden.

Allgemein gilt: $\mu_{\mathrm{RR}} \ll \mu_{\mathrm{GR}}, \mu_{\mathrm{RR}} > 0$

Reibung an rollenden Rädern

- Rollt ein Rad, ohne zu rutschen, wirkt am Auflagepunkt Haftreibung. Sie treibt das Fahrzeug an, bremst es oder hält es in der Kurve.
- Drehen die Räder durch oder blockieren sie, wirkt Gleitreibung. Weil $\mu_{\mathrm{GR}} \leq \mu_{\mathrm{HR}}$ ist, sind Antrieb und Bremsung dann schwächer.
- Die Rollreibung wirkt zusätzlich. Sie entsteht durch die Verformung von Rad und Unterlage und hemmt die Bewegung immer.

16.7 Beispielaufgabe und Übungen

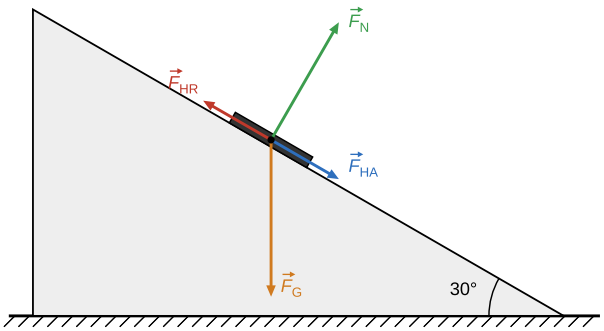
Beispielaufgabe

Ein Smartphone auf einer schiefen Ebene beginnt eine Bewegung bei einem Neigungswinkel von 30°. Bestimmen Sie den Haftreibungskoeffizienten.

geg.: $\alpha = 30°$, $m = 240\,\mathrm{g}$

ges.: μ_{HR}

Lös.:



$$F_{\mathrm{HR,max}} = \mu_{\mathrm{HR}} \cdot F_{\mathrm{N}}$$

$$F_{\mathrm{N}} = m \cdot g \cdot \cos\alpha$$

$$F_{\mathrm{HA}} = m \cdot g \cdot \sin\alpha$$

$$F_{\mathrm{HR,max}} = F_{\mathrm{HA}}$$

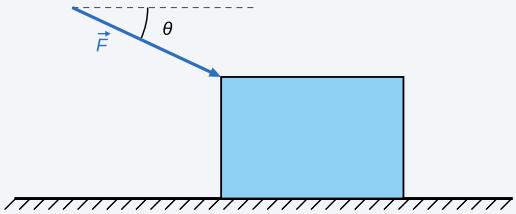
$$\mu_{\mathrm{HR}} \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha = m \cdot g \cdot \sin\alpha \qquad | : (m \cdot g \cdot \cos\alpha)$$

$$\mu_{\mathrm{HR}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan(\alpha)$$

$$= \tan(30°) = 0{,}58$$

Übungsaufgabe 1

Eine Kiste mit der Masse 5,0 kg wird über einen waagerechten Boden geschoben. Die schiebende Kraft $\vec{F}$ hat den Betrag 30 N und ist um $\theta = 25°$ gegen die Horizontale nach unten geneigt. Der Gleitreibungskoeffizient zwischen Kiste und Boden beträgt 0,30.



Berechnen Sie die Beträge

1. der Reibungskraft, die vom Boden auf die Kiste wirkt,
2. der Beschleunigung der Kiste.

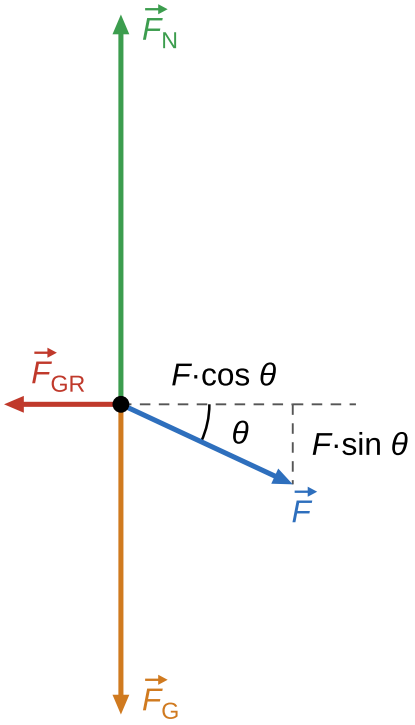
Lösung zu Übungsaufgabe 1

geg.: $\theta = 25°$, $F = 30\,\mathrm{N}$, $m = 5{,}0\,\mathrm{kg}$, $\mu_{\mathrm{GR}} = 0{,}30$

ges.: F_{GR}, a

Lös.:

Kraftskizze:



Zu 1:

$$F_{\mathrm{N}} = F_{\mathrm{G}} + F_{\perp} = m \cdot g + F \cdot \sin\theta$$

$$F_{\mathrm{GR}} = \mu_{\mathrm{GR}} \cdot F_{\mathrm{N}} = \mu_{\mathrm{GR}} \cdot (m \cdot g + F \cdot \sin\theta)$$

$$F_{\mathrm{GR}} = 0{,}30 \cdot \left(5{,}0\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} + 30\,\mathrm{N} \cdot \sin(25°)\right) = 0{,}30 \cdot 61{,}7\,\mathrm{N} = 18{,}5\,\mathrm{N}$$

Zu 2:

$$a = \frac{F_{\mathrm{res}}}{m}$$

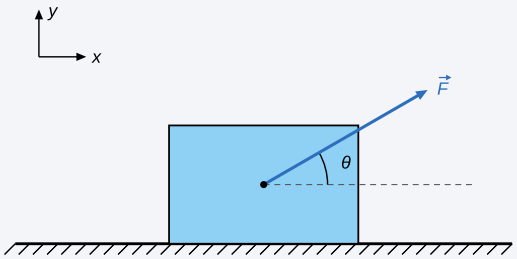
$$F_{\mathrm{res}} = F \cdot \cos\theta - F_{\mathrm{GR}} = 30\,\mathrm{N} \cdot \cos(25°) - 18{,}5\,\mathrm{N} = 8{,}7\,\mathrm{N}$$

$$a = \frac{8{,}7\,\mathrm{N}}{5{,}0\,\mathrm{kg}} = 1{,}7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Größe	Ergebnis
F_{GR}	18,5 N
a	1,7 m/s²

Übungsaufgabe 2

Ein Block der Masse m ruht auf einem waagerechten Boden. Auf den Block wirkt dann eine Kraft mit dem Betrag $0{,}600 \cdot m \cdot g$, die unter dem Winkel $\theta = 30°$ nach oben gerichtet ist.



Bestimmen Sie den Betrag der Beschleunigung des Blocks für die folgenden Reibungskoeffizienten:

1. $\mu_{\mathrm{HR}} = 0{,}800$ und $\mu_{\mathrm{GR}} = 0{,}600$
2. $\mu_{\mathrm{HR}} = 0{,}500$ und $\mu_{\mathrm{GR}} = 0{,}400$

Lösung zu Übungsaufgabe 2

geg.: $F = 0{,}600 \cdot m \cdot g = 0{,}600 \cdot F_{\mathrm{G}}$, $\theta = 30°$

ges.: a für beide Fälle

Lös.:

Normalkraft und waagerechte Komponente der Kraft:

$$F_{\mathrm{N}} = F_{\mathrm{G}} - F \cdot \sin\theta = m \cdot g \cdot (1 - 0{,}600 \cdot \sin(30°)) = 0{,}700 \cdot m \cdot g$$

$$F_x = F \cdot \cos\theta = 0{,}600 \cdot m \cdot g \cdot \cos(30°) = 0{,}520 \cdot m \cdot g$$

Zu 1:

$$F_{\mathrm{HR,max}} = \mu_{\mathrm{HR}} \cdot F_{\mathrm{N}} = 0{,}800 \cdot 0{,}700 \cdot m \cdot g = 0{,}560 \cdot m \cdot g$$

Es gilt $F_x < F_{\mathrm{HR,max}}$. Der Block bleibt in Ruhe:

$$a = 0$$

Zu 2:

$$F_{\mathrm{HR,max}} = 0{,}500 \cdot 0{,}700 \cdot m \cdot g = 0{,}350 \cdot m \cdot g$$

Es gilt $F_x > F_{\mathrm{HR,max}}$. Der Block setzt sich in Bewegung, es wirkt die Gleitreibungskraft:

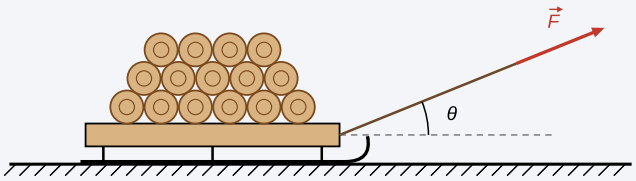
$$F_{\mathrm{GR}} = \mu_{\mathrm{GR}} \cdot F_{\mathrm{N}} = 0{,}400 \cdot 0{,}700 \cdot m \cdot g = 0{,}280 \cdot m \cdot g$$

$$a = \frac{F_{\mathrm{res}}}{m} = \frac{F_x - F_{\mathrm{GR}}}{m} = (0{,}520 - 0{,}280) \cdot g = 0{,}240 \cdot 9{,}81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 2{,}35 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Fall	Ergebnis
1	$a = 0$ (Block bleibt in Ruhe)
2	$a = 2{,}35 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

Übungsaufgabe 3

Ein anfangs ruhender Schlitten mit Brennholz soll mit einem Seil über einen waagerechten Boden gezogen werden. Die Zugkraft im Seil darf 600 N nicht überschreiten. Der Haftreibungskoeffizient zwischen dem Schlitten und dem Boden beträgt 0,40.



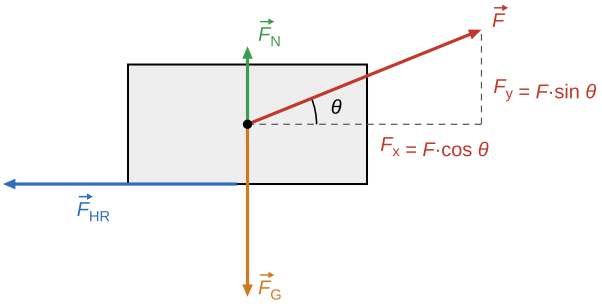
1. Bestimmen Sie den Winkel, den das Seil mit der Horizontalen einschließen soll, damit die größtmögliche Holzmenge gezogen werden kann.
2. Berechnen Sie für diese Situation die Gewichtskraft des Schlittens samt Holz.

Lösung zu Übungsaufgabe 3

geg.: $F = 600\,\mathrm{N}$, $\mu_{\mathrm{HR}} = 0{,}40$

ges.: θ, F_{G}

Lös.:



$$F_x = F \cdot \cos\theta$$

$$F_{\mathrm{N}} = F_{\mathrm{G}} - F_y = m \cdot g - F \cdot \sin\theta$$

$$F_{\mathrm{HR,max}} = \mu_{\mathrm{HR}} \cdot F_{\mathrm{N}} = (m \cdot g - F \cdot \sin\theta) \cdot \mu_{\mathrm{HR}}$$

Der Schlitten setzt sich in Bewegung, wenn gilt:

$$\begin{aligned} F_x &\geq F_{\mathrm{HR,max}} \\ F \cdot \cos\theta &\geq m \cdot g \cdot \mu_{\mathrm{HR}} - F \cdot \sin\theta \cdot \mu_{\mathrm{HR}} \qquad \mid + F \cdot \sin\theta \cdot \mu_{\mathrm{HR}} \\ F \cdot (\cos\theta + \sin\theta \cdot \mu_{\mathrm{HR}}) &\geq m \cdot g \cdot \mu_{\mathrm{HR}} \end{aligned}$$

Zu 1: Die linke Seite ist maximal, wenn $(\cos\theta + \sin\theta \cdot \mu_{\mathrm{HR}})$ maximal ist. Dazu wird die Ableitung nach θ gleich null gesetzt:

$$(\cos\theta + \sin\theta \cdot \mu_{\mathrm{HR}})' = -\sin\theta + \cos\theta \cdot \mu_{\mathrm{HR}} = 0$$

$$\cos\theta \cdot \mu_{\mathrm{HR}} = \sin\theta \quad \Rightarrow \quad \mu_{\mathrm{HR}} = \tan(\theta)$$

$$\theta = \arctan(\mu_{\mathrm{HR}}) = \arctan(0{,}40) = 21{,}8^\circ$$

Zu 2:

$$F_{\mathrm{G}} = m \cdot g \leq \frac{F \cdot (\cos\theta + \sin\theta \cdot \mu_{\mathrm{HR}})}{\mu_{\mathrm{HR}}}$$

$$F_{\mathrm{G}} = \frac{600\,\mathrm{N} \cdot (\cos(21{,}8^\circ) + \sin(21{,}8^\circ) \cdot 0{,}40)}{0{,}40} = 1616\,\mathrm{N} \approx 1{,}62\,\mathrm{kN}$$

Das entspricht einer Masse von $m = \dfrac{F_{\mathrm{G}}}{g} = 165\,\mathrm{kg}$.

Größe	Ergebnis
θ	21,8°
F_{G}	1,62 kN

16.8 Der Luftwiderstand / die Luftreibung

→ Wenn sich ein Körper relativ zu einem Medium (z. B. Luft, Wasser, Öl) bewegt, erfährt er einen Strömungswiderstand.

→ Bewegt er sich in Luft, heißt dieser Widerstand Luftwiderstand.

→ Der Strömungswiderstand kann mit der Gleichung

$$F_{\mathrm{LR}} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot \rho \cdot A \cdot v^2$$

berechnet werden. Dabei sind:

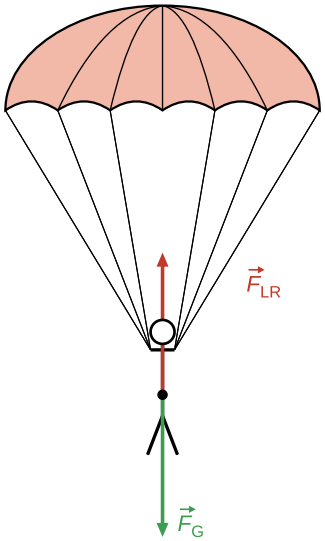
- c – der Widerstandsbeiwert (drag coefficient)
- ρ – die Dichte des Mediums
- A – die effektive Querschnittsfläche
- v – die Relativgeschwindigkeit zum Medium

Beispielaufgabe

Eine Person mit einer Masse von 80 kg springt mit einem Fallschirm aus einem Flugzeug. Der Fallschirm hat eine Querschnittsfläche von $40\,\mathrm{m}^2$ und einen Widerstandsbeiwert von 1,11. Die Luftdichte beträgt $1{,}23\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$.

Berechnen Sie die Endgeschwindigkeit des Springers.

Ansatz:



$$\begin{aligned} F_{\mathrm{G}} &= F_{\mathrm{LR}} \\ m \cdot g &= \frac{1}{2} \cdot c \cdot \rho \cdot A \cdot v^2 \qquad \left| \cdot \frac{2}{c \cdot \rho \cdot A} \right. \\ v^2 &= \frac{2 \cdot m \cdot g}{c \cdot \rho \cdot A} \\ v &= \sqrt{\frac{2 \cdot m \cdot g}{c \cdot \rho \cdot A}} \end{aligned}$$

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 80\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{1{,}11 \cdot 1{,}23\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 40\,\mathrm{m}^2}} = 5{,}4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 19\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

16.9 Übungsaufgaben zur Luftreibung

Übungsaufgabe 4

Ein PKW besitzt einen Strömungswiderstandskoeffizienten von 0,32. Die Fläche, die er beim Fahren der Luftströmung entgegensetzt, beträgt $1{,}8\,\mathrm{m}^2$. ($\rho_{\mathrm{Luft}} = 1{,}23\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$)

Berechnen Sie die erforderlichen Antriebskräfte zur Überwindung des Luftwiderstands bei:

a) $50\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$

b) $130\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$

c) $180\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$

Lösung zu Übungsaufgabe 4

geg.: $c = 0{,}32$, $A = 1{,}8\,\mathrm{m}^2$, $\rho = 1{,}23\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$

ges.: F_{Antrieb} für die drei Geschwindigkeiten

Lös.: Bei konstanter Geschwindigkeit ist die Antriebskraft so groß wie der Luftwiderstand:

$$F_{\mathrm{Antrieb}} = F_{\mathrm{LR}} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot \rho \cdot A \cdot v^2$$

Zu a):

$$F_{\mathrm{LR}} = \frac{1}{2} \cdot 0{,}32 \cdot 1{,}23\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 1{,}8\,\mathrm{m}^2 \cdot \left(\frac{50}{3{,}6}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 = 68{,}3\,\mathrm{N}$$

Zu b) und c): Die Rechnung verläuft genauso.

Geschwindigkeit	F_{Antrieb}
50 km/h	68,3 N
130 km/h	462 N
180 km/h	886 N

Übungsaufgabe 5

Die Tabelle enthält technische Daten von zwei PKW.

	PKW A (SUV)	PKW B (Kleinwagen)
Höhe	1656–1658 mm	1431–1461 mm
Breite	1842–1859 mm	1751 mm
max. Leistung	110 kW	59 kW
Höchstgeschwindigkeit	207 km/h	

1. Berechnen Sie den Widerstandskoeffizienten des PKW A. Nehmen Sie eine mittlere Höhe und mittlere Breite an.
2. Nehmen Sie an, der PKW B hat den Widerstandsbeiwert 0,39. Berechnen Sie die Höchstgeschwindigkeit des PKW B mit einer Leistung von 59 kW.

($\rho_{\mathrm{Luft}} = 1{,}23\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$)

Lösung zu Übungsaufgabe 5

geg.: PKW A: $P = 110\,\mathrm{kW}$, $v = 207\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$, $A = 1{,}66\,\mathrm{m} \cdot 1{,}85\,\mathrm{m}$; PKW B: $P = 59\,\mathrm{kW}$, $c_\mathrm{w} = 0{,}39$, $A = 1{,}446\,\mathrm{m} \cdot 1{,}751\,\mathrm{m}$; $\rho = 1{,}23\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$

ges.: c_w (PKW A), v (PKW B)

Lös.:

Ansatz:

$$F_\mathrm{Antrieb} = F_\mathrm{LR} + F_\mathrm{RR}$$

Die Rollreibungskraft F_RR wird hier vernachlässigt. Mit $P = F \cdot v$ folgt:

$$\frac{P}{v} = \frac{1}{2} \cdot c_\mathrm{w} \cdot \rho \cdot A \cdot v^2$$

Zu 1:

$$c_\mathrm{w} = \frac{2 \cdot P}{\rho \cdot A \cdot v^3} = \frac{2 \cdot 110\,000\,\mathrm{W}}{1{,}23\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 1{,}66\,\mathrm{m} \cdot 1{,}85\,\mathrm{m} \cdot \left(\frac{207}{3{,}6}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^3} = 0{,}31$$

Zu 2:

$$v^3 = \frac{2 \cdot P}{c_\mathrm{w} \cdot A \cdot \rho}$$

$$v = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot P}{c_\mathrm{w} \cdot A \cdot \rho}} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 59\,000\,\mathrm{W}}{0{,}39 \cdot 1{,}446\,\mathrm{m} \cdot 1{,}751\,\mathrm{m} \cdot 1{,}23\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}}} = 46{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 165\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

Größe	Ergebnis
c_w (PKW A)	0,31
v (PKW B)	46,0 m/s = 165 km/h

Klausurvorbereitung 1

Begriffe, die Sie definieren / erklären müssen

- Das Wechselwirkungsprinzip
- Das statische Gleichgewicht
- Vergleich von Momentan- und Durchschnittsgrößen
- Der freie Fall
- Unabhängigkeitsprinzip / Relativitätsprinzip
- Trägheitsprinzip

Aufgaben zur Kinematik

Aufgabe 1

Ein Zug startet im Leipziger Hauptbahnhof und erreicht nach 90 Sekunden seine Reisegeschwindigkeit von $180\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Nach diesen 90 Sekunden fährt er 12 Minuten gleichförmig.

a) Berechnen Sie den Betrag der Beschleunigung.

b) Berechnen Sie den Geschwindigkeitsbetrag in $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$, den der Zug nach 60 Sekunden hat.

c) Berechnen Sie den Weg, den der Zug nach 13,5 Minuten zurückgelegt hat.

Lösung zu Aufgabe 1

geg.: $t_1 = 90\,\mathrm{s}$, $v_1 = 180\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 50\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $t_2 = 12\,\mathrm{min} = 720\,\mathrm{s}$

ges.: a, $v(60\,\mathrm{s})$, $s(13{,}5\,\mathrm{min})$

Lös.:

Zu a):

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_1}{t_1} = \frac{50\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{90\,\mathrm{s}} = 0{,}56\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Zu b):

$$v(t) = a \cdot t \quad \Rightarrow \quad v(60\,\mathrm{s}) = \frac{50\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{90\,\mathrm{s}} \cdot 60\,\mathrm{s} = 33{,}3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 120\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

Zu c): Es gilt $13{,}5\,\mathrm{min} = 810\,\mathrm{s} = t_1 + t_2$. Der Zug fährt also 90 s gleichmäßig beschleunigt und danach 720 s gleichförmig.

$$s = \frac{a}{2} \cdot t_1^2 + v_1 \cdot t_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{50\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{90\,\mathrm{s}} \cdot (90\,\mathrm{s})^2 + 50\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 720\,\mathrm{s} = 2250\,\mathrm{m} + 36\,000\,\mathrm{m} = 38{,}25\,\mathrm{km}$$

Größe	Ergebnis
a	0,56 m/s²
$v(60\,\mathrm{s})$	120 km/h
s	38,25 km

Aufgabe 2

Ein Versorgungsflugzeug fliegt mit einem Geschwindigkeitsbetrag von $150\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ über ein Katastrophengebiet. Es wirft das Versorgungspaket ab, welches eine 300 m weit entfernte Landezone trifft. Berechnen Sie die Höhe, in der das Flugzeug fliegt.

Lösung zu Aufgabe 2

geg.: $v_0 = 150\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{150}{3{,}6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, $x_{\max} = 300\,\text{m}$

ges.: h

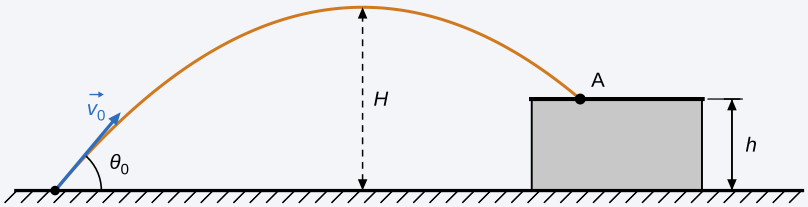
Lös.: Das Paket führt einen waagerechten Wurf aus.

$$x(t) = v_0 \cdot t \quad \Rightarrow \quad t_\text{f} = \frac{x_{\max}}{v_0} = \frac{300\,\text{m}}{\frac{150}{3{,}6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}} = 7{,}2\,\text{s}$$

$$h = \frac{g}{2} \cdot t_\text{f}^2 = \frac{9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2} \cdot (7{,}2\,\text{s})^2 = 254\,\text{m}$$

Aufgabe 3

Ein Ball wird vom Boden aus mit der Anfangsgeschwindigkeit $30{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ unter dem Winkel $\theta_0 = 50{,}0°$ über der Horizontalen auf ein Flachdach der Höhe h geschossen. Der Ball trifft nach 4,00 s im Punkt A auf das Dach.



Bestimmen Sie:

a) die Höhe h des Daches,

b) die Geschwindigkeit des Balls unmittelbar vor dem Auftreffen im Punkt A,

c) die maximale Höhe H, die der Ball über dem Boden erreicht.

Lösung zu Aufgabe 3

geg.: $v_0 = 30{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, $\theta_0 = 50{,}0°$, $t_\text{f} = 4{,}00\,\text{s}$

ges.: h, $v(t_\text{f})$, H

Lös.:

$$x(t) = v_0 \cdot \cos\theta_0 \cdot t \qquad y(t) = -\frac{g}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin\theta_0 \cdot t$$

$$v_x(t) = v_0 \cdot \cos\theta_0 \qquad v_y(t) = -g \cdot t + v_0 \cdot \sin\theta_0$$

Zu a): Die Höhe des Daches ist die Höhe des Balls zur Zeit t_f:

$$h = y(t_\text{f}) = -\frac{9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2} \cdot (4{,}00\,\text{s})^2 + 30{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \sin(50{,}0°) \cdot 4{,}00\,\text{s} = 13{,}4\,\text{m}$$

Zu b):

$$v_x = 30{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \cos(50{,}0°) = 19{,}3\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_y(t_\text{f}) = -\,9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 4{,}00\,\text{s} + 30{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \sin(50{,}0°) = -\,16{,}3\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(19{,}3\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + \left(-\,16{,}3\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} = 25{,}2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Zu c): Bei H ist $v_y(t) = 0$.

$$0 = -g \cdot t + v_0 \cdot \sin\theta_0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v_0 \cdot \sin\theta_0}{g} = \frac{30{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \sin(50{,}0^\circ)}{9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 2{,}34\,\mathrm{s}$$

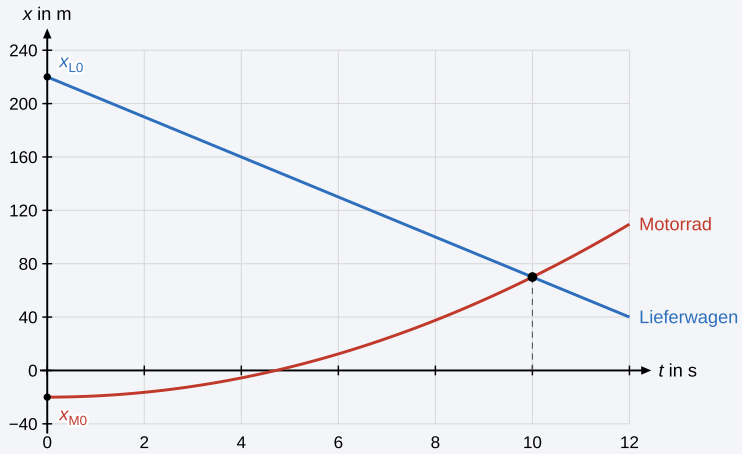
Einsetzen in $y(t)$:

$$H = y(2{,}34\,\mathrm{s}) = -\frac{g}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin\theta_0 \cdot t = 26{,}9\,\mathrm{m}$$

Größe	Ergebnis
h	13,4 m
v	25,2 m/s
H	26,9 m

Aufgabe 4

Ein Lieferwagen und ein Motorrad bewegen sich auf einer geraden Straße aufeinander zu. Das Diagramm zeigt ihre Bewegung. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich der Lieferwagen bei $x_{\mathrm{L0}} = 220\,\mathrm{m}$ und das Motorrad bei $x_{\mathrm{M0}} = -20\,\mathrm{m}$. Der Lieferwagen fährt mit der konstanten Geschwindigkeit $15{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Das Motorrad startet aus der Ruhe und beschleunigt gleichmäßig.



Bestimmen Sie den Betrag der Beschleunigung des Motorrads.

Lösung zu Aufgabe 4

geg.: $x_{\mathrm{L0}} = 220\,\mathrm{m}$, $x_{\mathrm{M0}} = -20\,\mathrm{m}$, $v_{\mathrm{L}} = -\,15{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $v_{\mathrm{M0}} = 0$; aus dem Diagramm: Begegnung bei $t_1 = 10\,\mathrm{s}$

ges.: a

Lös.:

$$x_{\mathrm{L}}(t) = x_{\mathrm{L0}} + v_{\mathrm{L}} \cdot t \qquad x_{\mathrm{M}}(t) = x_{\mathrm{M0}} + \frac{a}{2} \cdot t^2$$

Ort des Lieferwagens bei der Begegnung:

$$x_{\mathrm{L}}(t_1) = 220\,\mathrm{m} - 15{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 10\,\mathrm{s} = 70\,\mathrm{m}$$

Bei der Begegnung gilt $x_{\mathrm{M}}(t_1) = x_{\mathrm{L}}(t_1)$:

$$x_{\mathrm{M0}} + \frac{a}{2} \cdot t_1^2 = x_{\mathrm{L}}(t_1) \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2 \cdot (x_{\mathrm{L}}(t_1) - x_{\mathrm{M0}})}{t_1^2} = \frac{2 \cdot (70\,\mathrm{m} + 20\,\mathrm{m})}{(10\,\mathrm{s})^2} = 1{,}80\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Aufgabe 5

Ein ICE fährt mit $180\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ aus einem Tunnel. Der Lokführer sieht 900 m voraus auf demselben Gleis einen Güterzug, der mit $36\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ in dieselbe Richtung fährt. Der Lokführer des ICE bremst sofort.

a) Berechnen Sie den Betrag der konstanten Verzögerung (Betrag der negativen Beschleunigung), die der ICE mindestens haben muss, damit eine Kollision gerade noch vermieden wird.

b) Der Lokführer befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ bei $x = 0$, wenn er den Güterzug sieht. Skizzieren Sie die $x(t)$-Kurven für den ICE und den Güterzug für die Fälle, in denen eine Kollision gerade vermieden wird bzw. nicht vermieden wird.

Lösung zu Aufgabe 5

geg.: $v_\mathrm{I} = 180\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 50\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $v_\mathrm{G} = 36\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $D = 900\,\mathrm{m}$

ges.: $|a|$, $x(t)$-Kurven

Lös.:

Zu a): Im Bezugssystem des Güterzugs nähert sich der ICE mit der Relativgeschwindigkeit

$$v_\mathrm{rel} = v_\mathrm{I} - v_\mathrm{G} = 50\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 40\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

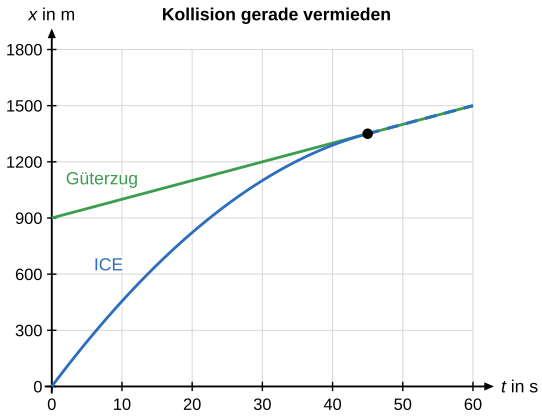
Diese Relativgeschwindigkeit muss auf der Strecke D gerade null werden. Für die gleichmäßig verzögerte Bewegung bis zum (relativen) Stillstand gilt:

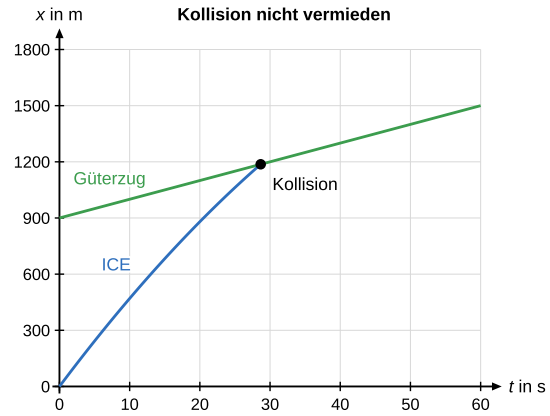
$$v_\mathrm{rel} = |a| \cdot t \qquad D = v_\mathrm{rel} \cdot t - \frac{|a|}{2} \cdot t^2 = \frac{v_\mathrm{rel}^2}{2 \cdot |a|}$$

$$|a| = \frac{v_\mathrm{rel}^2}{2 \cdot D} = \frac{\left(40\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{2 \cdot 900\,\mathrm{m}} = 0{,}89\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Der ICE erreicht den Güterzug nach $t = \frac{v_\mathrm{rel}}{|a|} = 45\,\mathrm{s}$ am Ort $x = 900\,\mathrm{m} + 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 45\,\mathrm{s} = 1350\,\mathrm{m}$.

Zu b): Die Kurve des Güterzugs ist eine Gerade, die Kurve des ICE eine nach unten geöffnete Parabel. Wird die Kollision gerade vermieden, dann berührt die Parabel die Gerade (gleicher Ort und gleiche Geschwindigkeit). Ist die Verzögerung kleiner, dann schneidet die Parabel die Gerade.

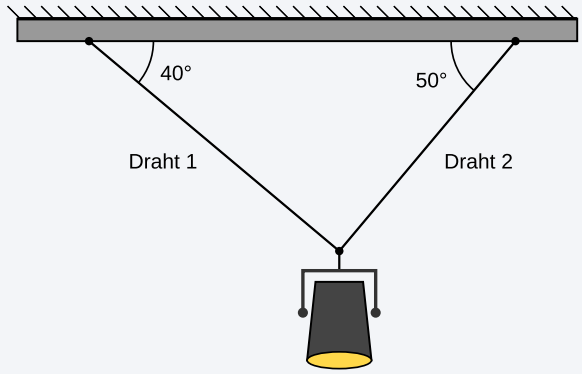




Aufgaben zu Kräften und zur Dynamik

Aufgabe 6

Eine Bühnenleuchte mit der Masse 24,0 kg ist wie in der Abbildung an zwei Drähten aufgehängt.



a) Zeichnen Sie das Kräftediagramm und beantworten Sie anhand dessen qualitativ die folgende Frage: Ist die Zugkraft im Draht 2 größer als die im Draht 1?

b) Überprüfen Sie Ihre Antwort unter Anwendung der Newtonschen Axiome und durch Berechnen der beiden Zugkräfte.

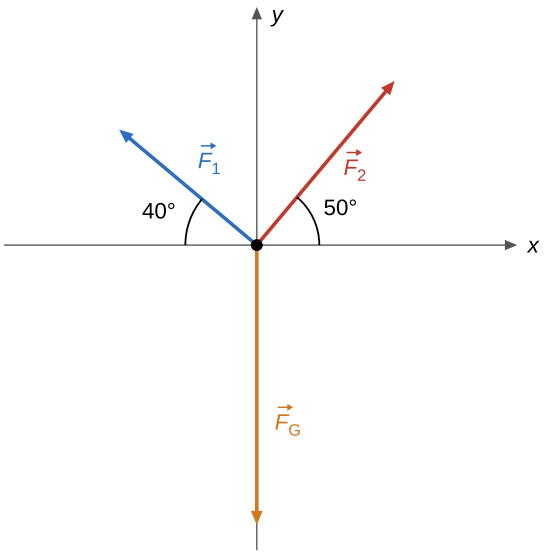
Lösung zu Aufgabe 6

geg.: $m = 24{,}0\,\mathrm{kg}$, Winkel der Drähte gegen die Horizontale: 40° (Draht 1), 50° (Draht 2)

ges.: F_1, F_2

Lös.:

Zu a):



Die waagerechten Komponenten der beiden Zugkräfte müssen sich ausgleichen. Der Draht 2 verläuft steiler. Seine Zugkraft muss deshalb größer sein, damit ihre waagerechte Komponente so groß ist wie die von Draht 1. Die Zugkraft im Draht 2 ist größer.

Zu b): Die Leuchte ruht (statisches Gleichgewicht), nach dem Trägheitsprinzip ist die Resultierende null.

x-Richtung:

$$F_2 \cdot \cos(50°) - F_1 \cdot \cos(40°) = 0 \quad \Rightarrow \quad F_2 = F_1 \cdot \frac{\cos(40°)}{\cos(50°)} = 1{,}19 \cdot F_1$$

y-Richtung:

$$F_1 \cdot \sin(40°) + F_2 \cdot \sin(50°) - m \cdot g = 0$$

Einsetzen von F_2:

$$F_1 \cdot (\sin(40°) + \cos(40°) \cdot \tan(50°)) = m \cdot g$$

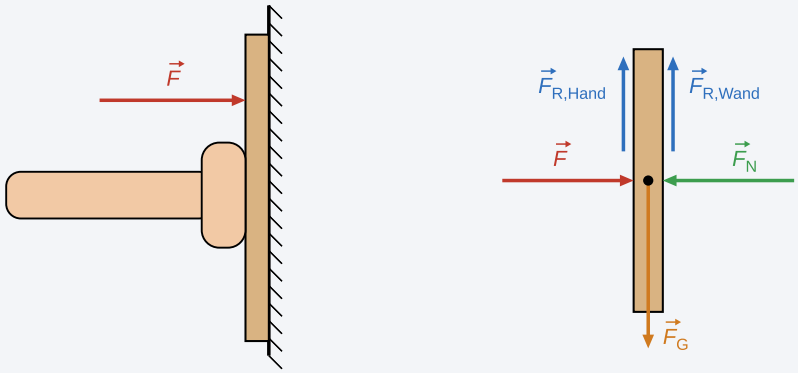
$$F_1 = \frac{m \cdot g}{\sin(40°) + \cos(40°) \cdot \tan(50°)} = \frac{24{,}0\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{1{,}556} = 151\,\text{N}$$

$$F_2 = 1{,}19 \cdot F_1 = 180\,\text{N}$$

Größe	Ergebnis
F_1	151 N
F_2	180 N

Aufgabe 7

Eine Person drückt ein Holzbrett mit der Masse 2,5 kg mit der flachen Hand waagerecht gegen eine senkrechte Wand. Der Haftreibungskoeffizient zwischen Brett und Hand beträgt 0,50 und der zwischen Brett und Wand 0,30.



a) Berechnen Sie die waagerechte Kraft, die die Person mindestens aufbringen muss, damit das Brett nicht herunterrutscht.

b) Die Person drückt nur mit einer Kraft von 22 N. Berechnen Sie für diesen Fall die Beschleunigung des Bretts, während es nach unten rutscht. Der Gleitreibungskoeffizient zwischen Brett und Hand beträgt 0,35 und der zwischen Brett und Wand 0,20.

Lösung zu Aufgabe 7

geg.: $m = 2{,}5\,\text{kg}$; Haftreibung: $\mu_{\text{HR},1} = 0{,}50$ (Hand), $\mu_{\text{HR},2} = 0{,}30$ (Wand); Gleitreibung: $\mu_{\text{GR},1} = 0{,}35$, $\mu_{\text{GR},2} = 0{,}20$; $F_\text{b} = 22\,\text{N}$

ges.: F_{min}, a

Lös.: Die positive y-Richtung zeigt nach oben. Das Brett wird in waagerechter Richtung nicht beschleunigt. Die Normalkraft der Wand ist deshalb so groß wie die Kraft F der Hand, und an beiden Flächen gilt $F_\text{N} = F$.

Zu a): Das Brett rutscht gerade nicht, wenn die beiden maximalen Haftreibungskräfte zusammen die Gewichtskraft ausgleichen:

$$\mu_{\mathrm{HR},1} \cdot F_{\min} + \mu_{\mathrm{HR},2} \cdot F_{\min} = m \cdot g$$

$$F_{\min} = \frac{m \cdot g}{\mu_{\mathrm{HR},1} + \mu_{\mathrm{HR},2}} = \frac{2{,}5\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{0{,}50 + 0{,}30} = 30{,}7\,\mathrm{N}$$

Zu b): Es gilt $F_{\mathrm{b}} < F_{\min}$, das Brett rutscht. Die beiden Gleitreibungskräfte zeigen nach oben:

$$F_{\mathrm{res}} = \left(\mu_{\mathrm{GR},1} + \mu_{\mathrm{GR},2}\right) \cdot F_{\mathrm{b}} - m \cdot g$$

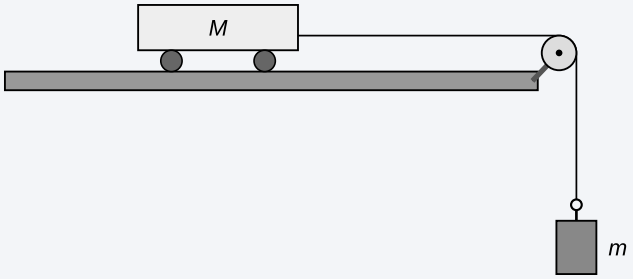
$$a = \frac{F_{\mathrm{res}}}{m} = \frac{(0{,}35 + 0{,}20) \cdot 22\,\mathrm{N} - 2{,}5\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{2{,}5\,\mathrm{kg}} = -\,5{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Das negative Vorzeichen bedeutet: Die Beschleunigung zeigt nach unten.

Größe	Ergebnis
$F_{\min}$	30,7 N
a	−5,0 m/s²

Aufgabe 8

Ein Wagen mit der Masse $M = 0{,}40\,\mathrm{kg}$ kann sich reibungsfrei auf einer waagerechten Fahrbahn bewegen. Er ist durch einen Faden, der über eine reibungsfreie Rolle läuft, mit einem hängenden Gewichtsstück der Masse $m = 0{,}10\,\mathrm{kg}$ verbunden. Der Faden und die Rolle haben im Vergleich zu den beiden Körpern vernachlässigbare Massen. Das Gewichtsstück fällt nach unten, während der Wagen nach rechts beschleunigt.



Bestimmen Sie:

a) die Beschleunigung des Wagens,

b) die Beschleunigung des Gewichtsstücks,

c) die Spannung im Faden.

Lösung zu Aufgabe 8

geg.: $M = 0{,}40\,\mathrm{kg}$, $m = 0{,}10\,\mathrm{kg}$

ges.: a_{W}, a_{G}, F_{Z}

Lös.: Wagen und Gewichtsstück sind durch den Faden verbunden, beide haben denselben Beschleunigungsbetrag a.

Wagen (M):

$$F_{\mathrm{Z}} = M \cdot a$$

Gewichtsstück (m):

$$F_{\mathrm{res}} = m \cdot a \quad \Rightarrow \quad F_{\mathrm{G}} - F_{\mathrm{Z}} = m \cdot a$$

Einsetzen von $F_\mathrm{Z} = M \cdot a$:

$$F_\mathrm{G} - M \cdot a = m \cdot a \qquad | + (M \cdot a)$$
$$F_\mathrm{G} = m \cdot a + M \cdot a$$
$$m \cdot g = a \cdot (m + M)$$

Zu a) und b):

$$a = \frac{m \cdot g}{m + M} = \frac{0{,}10\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{0{,}10\,\mathrm{kg} + 0{,}40\,\mathrm{kg}} = 1{,}96\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Der Wagen beschleunigt mit diesem Betrag nach rechts, das Gewichtsstück nach unten: $|a_\mathrm{W}| = |a_\mathrm{G}| = 1{,}96\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

Dasselbe Ergebnis erhält man, wenn man beide Körper als ein System betrachtet: $F_\mathrm{res} = m \cdot g = (M + m) \cdot a$.

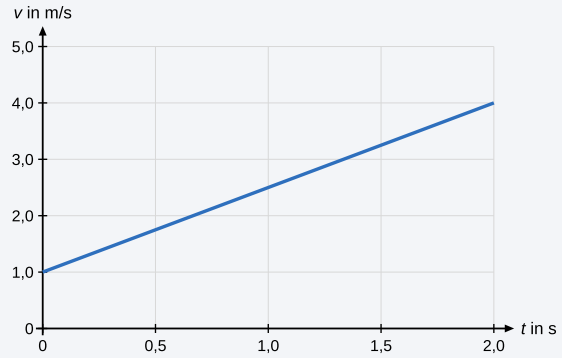
Zu c):

$$F_\mathrm{Z} = M \cdot a = M \cdot \frac{m \cdot g}{m + M} = 0{,}40\,\mathrm{kg} \cdot 1{,}96\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 0{,}78\,\mathrm{N}$$

Größe	Ergebnis
a (Betrag, für beide Körper)	1,96 m/s²
F_Z	0,78 N

Aufgabe 9

Eine Kiste mit der Masse 6,0 kg wird durch eine konstante, waagerechte Kraft von 45 N über den Boden geschoben. Das Diagramm zeigt die Geschwindigkeit der Kiste in Abhängigkeit von der Zeit.



Bestimmen Sie den Gleitreibungskoeffizienten zwischen der Kiste und dem Boden.

Lösung zu Aufgabe 9

geg.: $m = 6{,}0\,\mathrm{kg}$, $F = 45\,\mathrm{N}$; aus dem Diagramm: $v(0) = 1{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $v(2{,}0\,\mathrm{s}) = 4{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

ges.: μ_GR

Lös.:

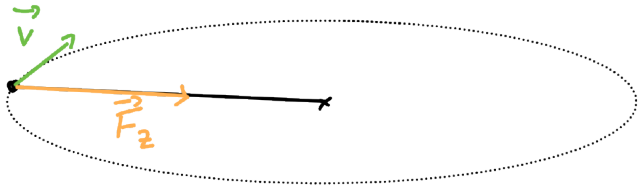
$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{4{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 1{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{2{,}0\,\mathrm{s}} = 1{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

$$F_\mathrm{res} = m \cdot a = F - F_\mathrm{GR} \qquad F_\mathrm{GR} = \mu_\mathrm{GR} \cdot F_\mathrm{N} = \mu_\mathrm{GR} \cdot m \cdot g$$

$$\mu_{\mathrm{GR}} = \frac{F - m \cdot a}{m \cdot g} = \frac{45\,\mathrm{N} - 6{,}0\,\mathrm{kg} \cdot 1{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{6{,}0\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 0{,}61$$

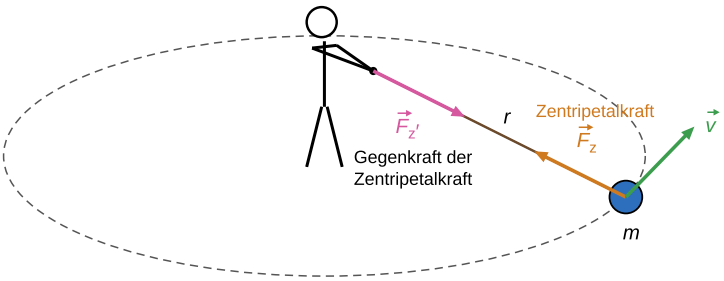
17 Die gleichförmige Kreisbewegung

Wdhlg.: Das Trägheitsprinzip: Ein Körper bleibt in Ruhe oder er bewegt sich geradlinig gleichförmig, solange die Resultierende aller auf ihn wirkenden Kräfte gleich null ist.

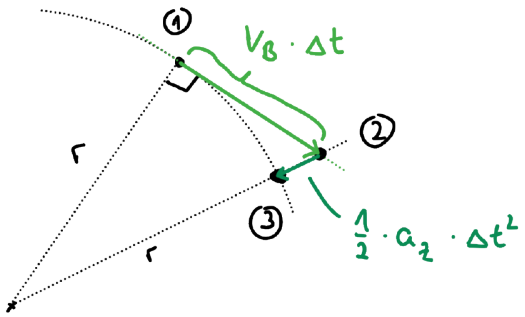


Herr Rosenthal schleudert sein Schlüsselband über seinem Kopf, die Schlüssel bewegen sich auf einer Kreisbahn. Die Schlüssel bewegen sich auf dieser Kreisbahn, weil Herr Rosenthal eine Kraft auf sie ausübt, die zum Mittelpunkt des Kreises zeigt.

Diese Kraft heißt Zentripetalkraft.



17.1 Die Herleitung der Gleichung zur Berechnung der Zentripetalkraft



a_z – Zentripetalbeschleunigung

Für das Dreieck gilt:

$$r^2 + (v_B \cdot \Delta t)^2 = \left(r + \frac{1}{2} \cdot a_z \cdot \Delta t^2\right)^2$$

$$r^2 + v_B^2 \cdot \Delta t^2 = r^2 + r \cdot a_z \cdot \Delta t^2 + \frac{1}{4} \cdot a_z^2 \cdot \Delta t^4 \qquad | : \Delta t^2, \Delta t \neq 0$$

$$v_B^2 = r \cdot a_z + \frac{1}{4} \cdot a_z^2 \cdot \Delta t^2$$

$\Delta t \to 0 \rightarrow \Delta t^2 \to 0$, der Summand $\frac{1}{4} \cdot a_z^2 \cdot \Delta t^2$ ist dann gleich null.

$\rightarrow v_B^2 = a_z \cdot r$

$$a_z = \frac{v_B^2}{r}$$

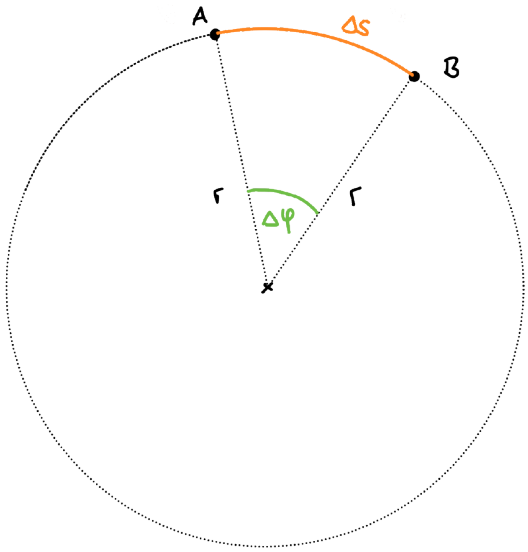
$$F_z = m \cdot a_z = m \cdot \frac{v_B^2}{r}$$

mit: v_B – Bahngeschwindigkeit, r – Radius der Kreisbewegung

Die Bahngeschwindigkeit v_B ist die Geschwindigkeit, mit der sich der Körper entlang der Kreisbahn bewegt. Der Betrag von v_B ist konstant. → „gleichförmig“

→ Die Zentripetalbeschleunigung ändert nur die Richtung von $\vec{v}_B$, nicht den Betrag.

17.2 Die Winkelgrößen der gleichförmigen Kreisbewegung



Der Körper legt in der Zeitspanne Δt den Weg Δs zurück und überstreicht den Winkel $\Delta\varphi$.

$$v_B = \frac{\Delta s}{\Delta t} \qquad \text{für } \Delta t \to 0: \quad v_B = \dot{s}(t)$$

$$\omega := \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \qquad \text{für } \Delta t \to 0: \quad \omega = \dot{\varphi}(t)$$

(ω: „omega“)

Die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ gibt an, welcher Winkel in einer bestimmten Zeitspanne überstrichen wird.

Die Zeit T, die der Körper für einen vollständigen Umlauf benötigt, heißt Umlaufzeit. Der Kehrwert der Umlaufzeit f

$$f = \frac{1}{T}$$

heißt Drehfrequenz.

$$v_B = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T} \qquad \omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2 \cdot \pi}{T}$$

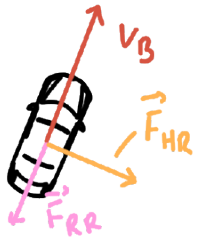
$$v_B = \omega \cdot r$$

$$a_z = \frac{v_B^2}{r} = \omega^2 \cdot r$$

Ausblick: $\vec{v}_\mathrm{B} = \vec{\omega} \times \vec{r} = -(\vec{r} \times \vec{\omega})$ → „Rechte-Hand-Regel“

17.3 Einige Beispiele für Kreisbewegungen mit ihren Zentripetalkräften

Bewegung	Zentripetalkraft
Schlüssel am Band	Zugkraft im Seil
Erde um die Sonne	Gravitationskraft
Kurvenfahrt eines PKW	Haftreibungskraft



17.4 Übungen

Übungsaufgabe 1

Auf nassem Kopfsteinpflaster ist die Straße besonders rutschig ($\mu_\mathrm{HR} \approx 0{,}35$). Bestimmen Sie, mit welcher maximalen Bahngeschwindigkeit unter diesen Bedingungen eine Kurve mit dem Radius 22 m durchfahren werden kann.

Lösung zu Übungsaufgabe 1

geg.: $\mu_\mathrm{HR} = 0{,}35$, $r = 22\,\mathrm{m}$

ges.: $v_\mathrm{B,max}$

Lös.: Die Haftreibungskraft ist die Zentripetalkraft. Sie kann höchstens den Wert $F_\mathrm{HR,max}$ annehmen:

$$F_\mathrm{z} \le F_\mathrm{HR,max}$$

$$m \cdot \frac{v_\mathrm{B}^2}{r} \le \mu_\mathrm{HR} \cdot m \cdot g \qquad | \cdot \frac{r}{m}$$

$$v_\mathrm{B}^2 \le \mu_\mathrm{HR} \cdot g \cdot r$$

$$v_\mathrm{B,max} = \sqrt{\mu_\mathrm{HR} \cdot g \cdot r} = \sqrt{0{,}35 \cdot 9{,}81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 22\,\mathrm{m}} = 8{,}7 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 31 \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

Übungsaufgabe 2

Eine Radfahrerin fährt mit einer Geschwindigkeit von $7{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ in eine Kurve mit 24 m Durchmesser ($\mu_\mathrm{HR} = 0{,}45$).

1. Begründen Sie, ob dies eine angemessene Geschwindigkeit ist.
2. Bestimmen Sie den minimalen Radius einer Kreisbahn, die mit dieser Geschwindigkeit unter den gegebenen Bedingungen noch sicher durchfahren werden kann.

Lösung zu Übungsaufgabe 2

geg.: $v_\mathrm{B} = 7{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $d = 24\,\mathrm{m} \rightarrow r = 12\,\mathrm{m}$, $\mu_\mathrm{HR} = 0{,}45$

ges.: $v_\mathrm{B,max}$, r_min

Lös.: Aus $F_\mathrm{z} \le F_\mathrm{HR,max}$ folgt wie in Übungsaufgabe 1:

$$v_\mathrm{B}^2 \leq \mu_\mathrm{HR} \cdot g \cdot r$$

Zu 1:

$$v_\mathrm{B,max} = \sqrt{\mu_\mathrm{HR} \cdot g \cdot r} = \sqrt{0{,}45 \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 12\,\mathrm{m}} = 7{,}3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Es gilt $7{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} < 7{,}3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Die Kurve kann mit dieser Geschwindigkeit gerade noch durchfahren werden. Der Abstand zur maximalen Geschwindigkeit ist aber sehr klein. Angemessen ist die Geschwindigkeit deshalb nicht, schon eine etwas glattere Stelle führt zum Wegrutschen.

Zu 2:

$$r \geq \frac{v_\mathrm{B}^2}{\mu_\mathrm{HR} \cdot g} \quad \Rightarrow \quad r_\mathrm{min} = \frac{\left(7{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{0{,}45 \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 11{,}1\,\mathrm{m}$$

Größe	Ergebnis
$v_\mathrm{B,max}$	7,3 m/s
r_min	11,1 m

Übungsaufgabe 3

Auf einer asphaltierten Bergstraße folgt auf eine Rechtskurve von 30 m Durchmesser eine Linkskurve von 11 m Durchmesser. Bestimmen Sie, mit welcher Geschwindigkeit die beiden Kurven unter besten Bedingungen (trockene, saubere Fahrbahn, $\mu_\mathrm{HR} = 0{,}8$) noch sicher zu durchfahren sind.

Lösung zu Übungsaufgabe 3

geg.: $r_1 = 15\,\mathrm{m}$, $r_2 = 5{,}5\,\mathrm{m}$, $\mu_\mathrm{HR} = 0{,}8$

ges.: v_1, v_2

Lös.:

$$F_\mathrm{z} \leq F_\mathrm{HR,max} \quad \Rightarrow \quad v_\mathrm{B,max} = \sqrt{\mu_\mathrm{HR} \cdot g \cdot r}$$

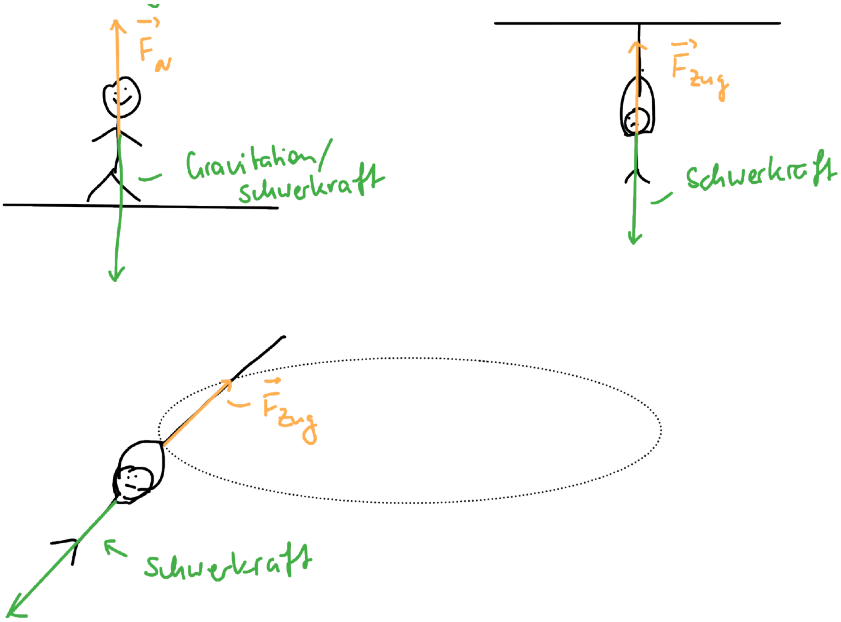
$$v_1 = \sqrt{0{,}8 \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 15\,\mathrm{m}} = 10{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 39\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

$$v_2 = \sqrt{0{,}8 \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 5{,}5\,\mathrm{m}} = 6{,}6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 24\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

Kurve	maximale Geschwindigkeit
Rechtskurve ($r_1 = 15\,\mathrm{m}$)	10,8 m/s = 39 km/h
Linkskurve ($r_2 = 5{,}5\,\mathrm{m}$)	6,6 m/s = 24 km/h

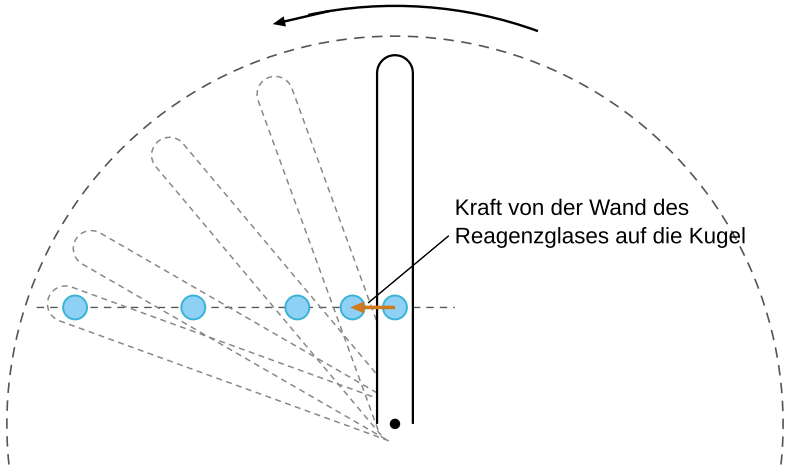
18 Trägheitskräfte und die Zentrifugalkraft

18.1 Trägheitskräfte und „erfahrene Schwerkraft“



→ Die Person „erfährt“ eine Schwerkraft, die der Zug- oder Normalkraft entgegengesetzt ist und den gleichen Betrag hat.

18.2 Die Zentrifugalkraft



Von außen beobachten wir:

- Die Kugel erfährt am Anfang der Bewegung eine Kraft nach links, danach bewegt sie sich geradlinig gleichförmig, bis sie am Boden des Reagenzglases ankommt.

Die Kugel beobachtet:

- „Ich bewege mich von der Öffnung des Reagenzglases weg.“

Die Kugel erfährt eine Kraft, die nur in ihrem Bezugssystem beobachtbar ist: die Zentrifugalkraft.

Sie greift an der Kugel an und zeigt radial nach außen. Sie hat den gleichen Betrag wie die Zentripetalkraft.

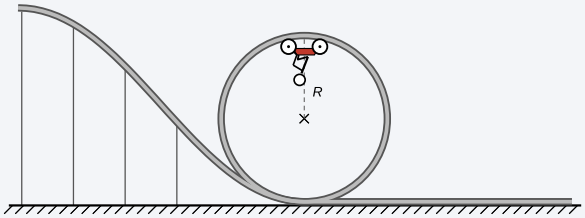
- Sie ist nicht die Gegenkraft der Zentripetalkraft.

Fazit: Die Zentrifugalkraft gibt es nur im beschleunigten Bezugssystem der Kugel.

18.3 Übungen

Übungsaufgabe 1

Bei einer Stuntshow fährt eine Motorradfahrerin durch einen Looping. Der Looping ist ein Kreis mit dem Radius $R = 3{,}5\,\mathrm{m}$.



Bestimmen Sie die kleinste Geschwindigkeit v, die die Fahrerin und ihr Motorrad am höchsten Punkt des Loopings haben müssen, damit sie dort in Kontakt mit der Bahn bleiben.

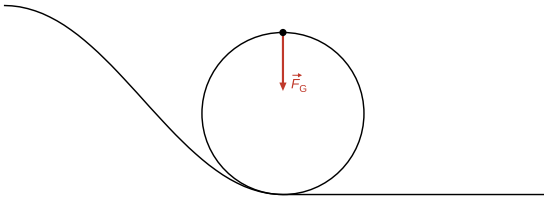
Lösung zu Übungsaufgabe 1

geg.: $R = 3{,}5\,\mathrm{m}$

ges.: v

Lös.:

① äußerer Beobachter



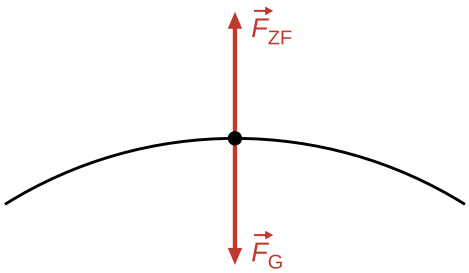
- Auf die Fahrerin wirkt immer die Gewichtskraft $\vec{F}_\mathrm{G}$.
- Das muss die Zentripetalkraft sein.

$$F_\mathrm{z} = F_\mathrm{G}$$

$$m \cdot \frac{v^2}{r} = m \cdot g$$

$$v = \sqrt{r \cdot g} = \sqrt{3{,}5\,\mathrm{m} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 5{,}9\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

② mitbewegter Beobachter



- Damit sie nicht fällt, muss $F_\mathrm{G} = F_\mathrm{ZF}$ sein.

Die Zentrifugalkraft F_ZF hat den gleichen Betrag wie die Zentripetalkraft. Es folgt dieselbe Gleichung und dasselbe Ergebnis: $v = \sqrt{r \cdot g} = 5{,}9\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Übungsaufgabe 2

In einer Zentrifuge werden Proben mit einer Drehzahl von 4000 Umdrehungen pro Minute mit einem Radius von 5 cm rotiert. Ein Teilchen in der Probe hat die Masse $m = 1{,}2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{kg}$.

Berechnen Sie:

① die Gewichtskraft, die auf das Probeteilchen wirkt.

② die Zentrifugalkraft, die das Probeteilchen erfährt.

Lösung zu Übungsaufgabe 2

geg.: $m = 1{,}2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{kg}$, $f = 4000\,\frac{1}{\mathrm{min}} = 4000\,\frac{1}{60\,\mathrm{s}} = 66{,}67\,\frac{1}{\mathrm{s}}$, $r = 5\,\mathrm{cm} = 0{,}05\,\mathrm{m}$

ges.: F_G, F_ZF

Lös.:

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2 \cdot \pi}{T} \quad \text{und} \quad f = \frac{1}{T} \quad \Rightarrow \quad \omega = 2 \cdot \pi \cdot f$$

$$v = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T} \quad \Rightarrow \quad v = \omega \cdot r$$

$$F_\mathrm{ZF} = m \cdot \frac{v^2}{r} = m \cdot \frac{\omega^2 \cdot r^2}{r} = m \cdot \omega^2 \cdot r$$

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 418{,}88\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$$

$$F_\mathrm{ZF} = m \cdot \omega^2 \cdot r = 1{,}2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{kg} \cdot \left(418{,}88\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right)^2 \cdot 0{,}05\,\mathrm{m} = 0{,}0105\,\mathrm{N} = 1{,}05 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{N}$$

$$F_\mathrm{G} = m \cdot g = 1{,}2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 1{,}2 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{N}$$

Vergleich:

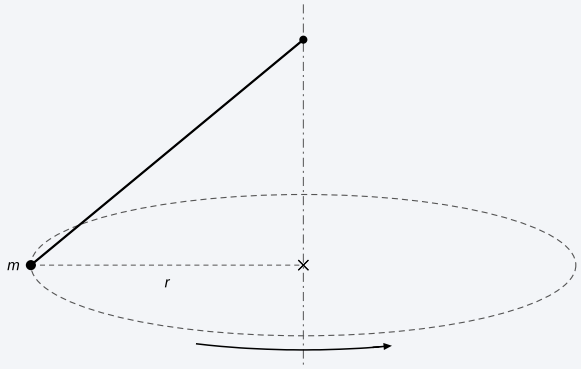
$$F_\mathrm{ZF} = n \cdot F_\mathrm{G} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{F_\mathrm{ZF}}{F_\mathrm{G}} = \frac{\omega^2 \cdot r}{g} = 894$$

→ Die Zentrifugalkraft ist ungefähr 900-mal größer als die Gewichtskraft.

Größe	Ergebnis
F_G	$1{,}2 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{N}$
F_ZF	$1{,}05 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{N}$

Übungsaufgabe 3

Bei einer Figur im Eiskunstlauf dreht sich ein Läufer auf der Stelle und wirbelt seine Partnerin an den Händen auf einem waagerechten Kreis mit dem Radius 1,2 m herum. Die Partnerin berührt das Eis dabei nicht. Sie hat die Masse 52 kg, und eine Umdrehung dauert 2,0 s.



a) Ermitteln Sie den Betrag und die Richtung der Kraft, die der Läufer auf seine Partnerin ausübt. (Stellen Sie sich die Partnerin vereinfacht als punktförmiges Teilchen vor.)

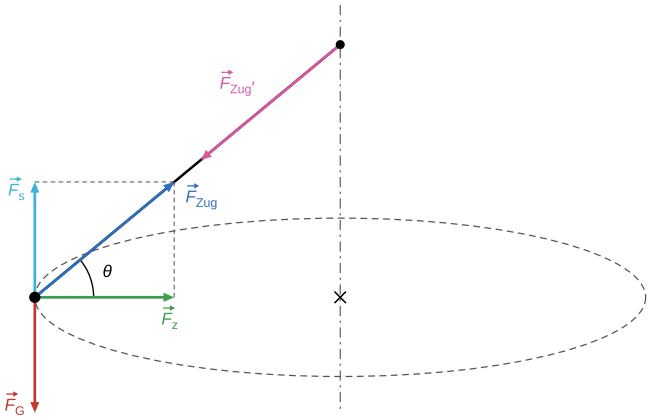
b) Geben Sie den Betrag und die Richtung der Kraft an, die die Partnerin auf den Läufer ausübt.

Lösung zu Übungsaufgabe 3

geg.: $r = 1{,}2\,\mathrm{m}$, $m = 52\,\mathrm{kg}$, $T = 2{,}0\,\mathrm{s}$

ges.: F_{Zug} (Betrag und Richtung), F'_{Zug}

Lös.:



Der Läufer ist für zwei Dinge verantwortlich:

① Die Partnerin bewegt sich weder nach unten noch nach oben. Der senkrechte Anteil F_{s} der Kraft gleicht die Gewichtskraft aus:

$$F_{\mathrm{s}} = F_{\mathrm{G}} = m \cdot g = 52\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 510\,\mathrm{N}$$

② Die Partnerin bewegt sich gleichförmig auf einer Kreisbahn. Der waagerechte Anteil der Kraft ist die Zentripetalkraft:

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = \frac{2 \cdot \pi}{2{,}0\,\mathrm{s}} = 3{,}14\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$$

$$F_\mathrm{z} = m \cdot \omega^2 \cdot r = 52\,\mathrm{kg} \cdot \left(3{,}14\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right)^2 \cdot 1{,}2\,\mathrm{m} = 616\,\mathrm{N}$$

Zu a):

$$F_\mathrm{Zug} = \sqrt{F_\mathrm{z}^2 + F_\mathrm{s}^2} = \sqrt{(616\,\mathrm{N})^2 + (510\,\mathrm{N})^2} = 800\,\mathrm{N}$$

$$\tan\theta = \frac{F_\mathrm{s}}{F_\mathrm{z}} \quad \Rightarrow \quad \theta = \arctan\left(\frac{F_\mathrm{s}}{F_\mathrm{z}}\right) = \arctan\left(\frac{510\,\mathrm{N}}{616\,\mathrm{N}}\right) = 39{,}6^\circ$$

Die Kraft zeigt schräg nach oben zur Drehachse hin, unter dem Winkel $\theta = 39{,}6^\circ$ gegen die Horizontale.

Zu b): Nach dem Wechselwirkungsprinzip übt die Partnerin auf den Läufer eine gleich große, entgegengesetzt gerichtete Kraft aus: $F'_\mathrm{Zug} = 800\,\mathrm{N}$, schräg nach unten und von der Drehachse weg (39,6° unter der Horizontalen).

Größe	Ergebnis
F_Zug	800 N, 39,6° über der Horizontalen, zur Drehachse hin
F'_Zug	800 N, entgegengesetzt zu F_Zug

19 Energie, Arbeit und Leistung

19.1 Energie

→ Was ist Energie?

- Es gibt verschiedene Formen von Energie.
- Anschaulich ist Energie die Fähigkeit eines Körpers, Arbeit zu verrichten, Strahlung auszusenden oder Wärme abzugeben.

→ Die Energie ist eine Zahl, die wir einem Körper oder einem System aus Körpern zuordnen können. Wenn eine äußere Kraft, Strahlung oder Wärme einen dieser Körper verändert, ändert sich auch diese Zahl.

→ Die SI-Einheit der Energie ist das Joule.

$$1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} = 1\,\mathrm{Nm} = 1\,\mathrm{Ws}$$

1 Nm: „Newtonmeter“, 1 Ws: „Wattsekunde“

19.1.1 Energieformen

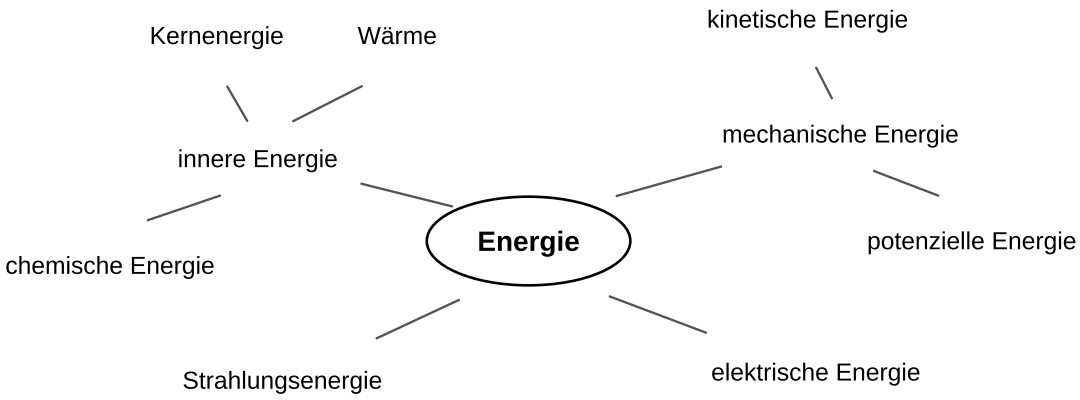


Abbildung 24: Energieformen

19.2 Arbeit

Was ist Arbeit?

- Arbeit ist die Veränderung der Energie.

→ Wenn eine Kraft auf einen Körper wirkt, ändert sich die Energie dieses Körpers.

→ Man sagt: Die Kraft verrichtet eine Arbeit an dem Objekt.

Definition: Die Arbeit W ist die Energie, die eine auf ein Objekt wirkende Kraft diesem Objekt zuführt bzw. von diesem Objekt abführt.

Energie, die dem Objekt zugeführt wird, entspricht positiven Werten der Arbeit. Energie, die abgeführt wird, entspricht negativen Werten der Arbeit.

$$[W] = 1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{Nm} = 1\,\mathrm{Ws}$$

$$W = \Delta E$$

Für mechanische Arbeit gilt:

$$W = \int \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{s}$$

Wenn $\vec{F}$ konstant ist (Betrag und Richtung), gilt:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = F \cdot s \cdot \cos\theta$$

19.3 Leistung

→ Die Leistung P gibt an, wie viel Arbeit in einer bestimmten Zeitspanne verrichtet wird.

→ Durchschnittliche Leistung:

$$P = \frac{W}{\Delta t} = \frac{\Delta E}{\Delta t}$$

Momentane Leistung:

$$P = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$$

→ Die SI-Einheit der Leistung ist das Watt.

$$[P] = 1\,\mathrm{W} = 1\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}}$$

20 Potenzielle Energie und Hubarbeit

- Potenzielle Energie ist eine Energie der Lage in Bezug auf einen Grundzustand.
- Es gibt verschiedene potenzielle Energien. Wenn wir von der potenziellen Energie sprechen, meinen wir die Energie im Gravitationsfeld der Erde.
- Die potenzielle Energie wird mit E_{pot} (U) bezeichnet.

20.1 Herleitung der Gleichung

Wie viel Arbeit muss verrichtet werden, um den Apfel anzuheben?

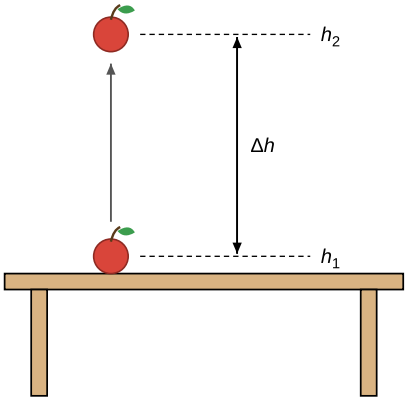


Abbildung 25: Ein Apfel wird von der Höhe h_1 auf die Höhe h_2 angehoben.

$$\begin{aligned} W &= \vec{F} \cdot \vec{s} = F \cdot s \cdot \cos\theta \\ &= F \cdot s \\ &= m \cdot g \cdot \Delta h = \Delta E_{\text{pot}} \end{aligned}$$

20.2 Beispielaufgabe

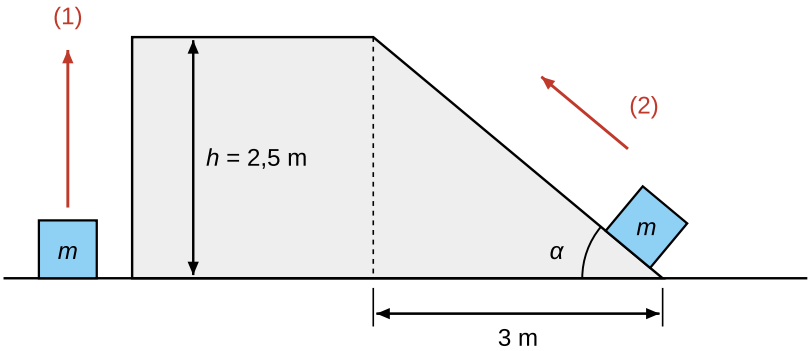


Abbildung 26: Der Gegenstand wird direkt angehoben (1) oder über die Rampe nach oben gedrückt (2).

$m = 50\,\text{kg}$.

Ein 50 kg schwerer Gegenstand soll nach oben befördert werden. Vergleichen Sie die mechanische Arbeit, die nötig ist, um ihn

1. direkt anzuheben,
2. die Rampe nach oben zu drücken.

$W = \vec{F} \cdot \vec{s}$

Zu 1:

$$W = m \cdot g \cdot \Delta h = 50\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 2{,}5\,\mathrm{m} = 1226\,\mathrm{J}$$

Zu 2, Variante 1:

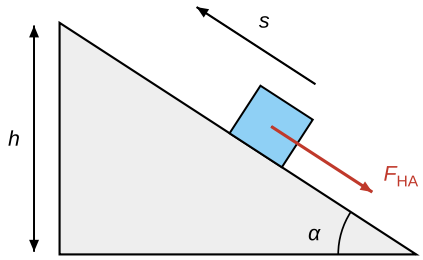


Abbildung 27: Hangabtriebskraft und Weg auf der Rampe

$$\sin\alpha = \frac{h}{s}$$

$$\begin{aligned} W &= F_{\mathrm{HA}} \cdot s \\ &= F_{\mathrm{HA}} \cdot \frac{h}{\sin\alpha} \\ &= m \cdot g \cdot \sin\alpha \cdot \frac{h}{\sin\alpha} \\ &= m \cdot g \cdot h \end{aligned}$$

Zu 2, Variante 2:

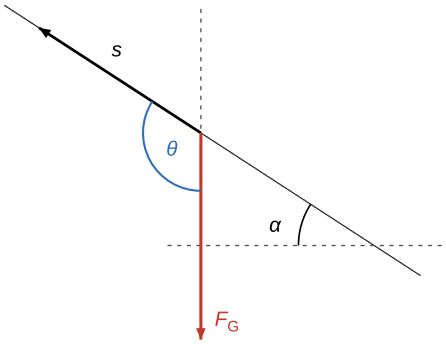


Abbildung 28: Winkel θ zwischen der Gewichtskraft und dem Weg

$$\begin{aligned} W &= \vec{F} \cdot \vec{s} = F \cdot s \cdot \cos\theta \\ &= F \cdot s \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \end{aligned}$$

mit

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin(\alpha)$$

$$W = -F_{\mathrm{G}} \cdot s \cdot \sin(\alpha) = -m \cdot g \cdot h$$

→ Das ist die Arbeit, die die Gewichtskraft verrichtet. Die Arbeit, die nötig ist, um den Gegenstand nach oben zu drücken, ist $+m \cdot g \cdot h$.

→ Es spielt keine Rolle, welchen Weg Sie gehen, die benötigte Arbeit ist immer gleich.

21 Die Spannenergie einer Feder und die Dehnungsarbeit

- Die Spannkraft (Federkraft, rücktreibende Kraft) einer Feder ist abhängig von ihrer Ausdehnung aus ihrem Ruhezustand.

$$F = -D \cdot x \qquad (= -k \cdot x)$$

D (bzw. k): die Federkonstante

- x ist hier die Auslenkung aus der Ruhelage ($x = 0$).

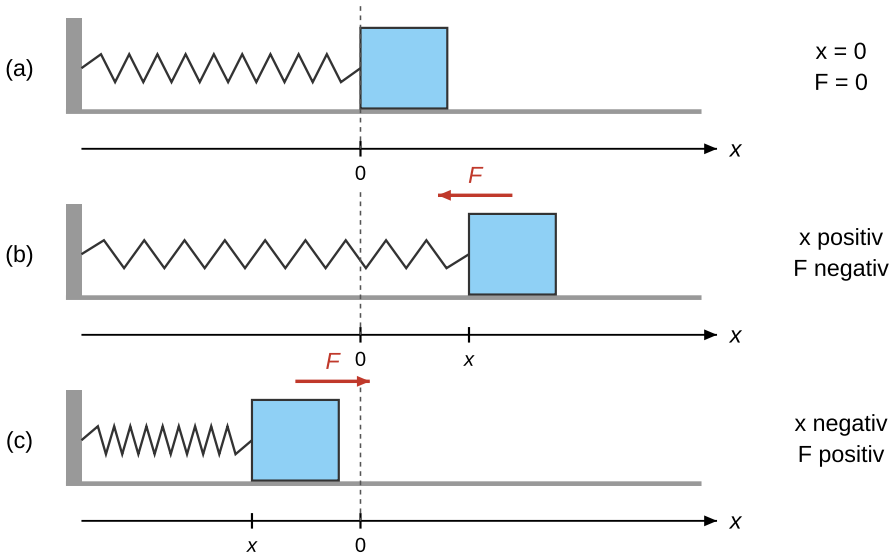


Abbildung 29: Die Federkraft zeigt immer zur Ruhelage: (a) Ruhelage, (b) gedehnte Feder, (c) gestauchte Feder.

- Wie viel Spannenergie ist in einer Feder, die um den Wert x' aus der Ruhelage ausgelenkt wurde?

Um die Feder auszulenken, muss eine äußere Kraft $F_\mathrm{a} = D \cdot x$ gegen die Spannkraft wirken. Diese Kraft verrichtet die Arbeit

$$W = \int_0^{x'} F_\mathrm{a}(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^{x'} F_\mathrm{a}(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^{x'} D \cdot x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot D \cdot x'^2 = E_\mathrm{spann}$$

Um eine Feder von x_1 auf x_2 auszudehnen, muss die Arbeit

$$W = \int_{x_1}^{x_2} D \cdot x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot D \cdot (x_2^2 - x_1^2) = E_\mathrm{spann}(x_2) - E_\mathrm{spann}(x_1)$$

verrichtet werden.

Diese Arbeit kann auch grafisch ermittelt werden:

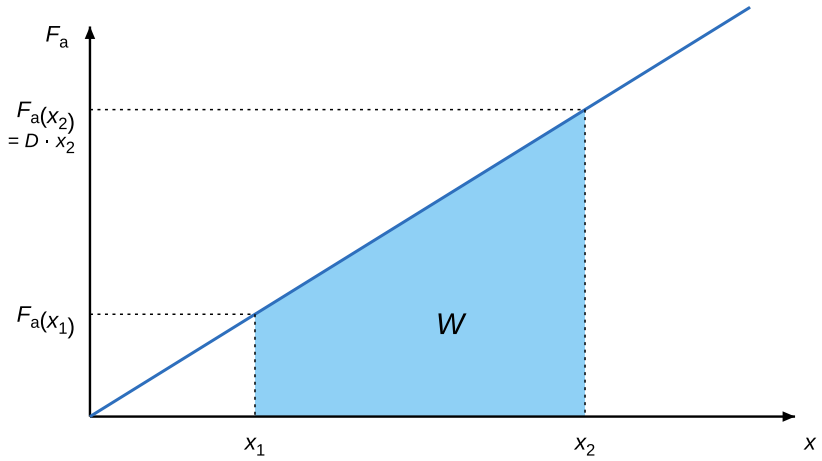


Abbildung 30: Die Arbeit W entspricht der Fläche unter der Geraden zwischen x_1 und x_2.

22 Die kinetische Energie und die Beschleunigungsarbeit

- Die kinetische Energie ist eine Energie der Bewegung.
- Jeder Körper mit einer Bahngeschwindigkeit v hat eine kinetische Energie E_{kin} (K).
- Welche Arbeit muss verrichtet werden, um einen Körper aus der Ruhe bis zur Geschwindigkeit v_1 zu beschleunigen?

Konstante Beschleunigung:

$$\begin{aligned} W = \int F \,\mathrm{d}s = F \cdot s = F \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = m \cdot a \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \\ = \frac{1}{2} \cdot m \cdot a^2 \cdot t^2 \qquad (v = a \cdot t) \\ = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \end{aligned}$$

$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \rightarrow \mathrm{d}s = v \cdot \mathrm{d}t$

$$\begin{aligned} W = \int F \,\mathrm{d}s = \int_0^{s_1} m \cdot a \,\mathrm{d}s = m \int_0^{t_1} a \cdot v \,\mathrm{d}t = m \int_0^{t_1} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \cdot v \,\mathrm{d}t = m \int_0^{v_1} v \,\mathrm{d}v \\ = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 \end{aligned}$$

→ Wenn ein Körper von v_1 auf v_2 beschleunigt wird, wird die Arbeit

$$\begin{aligned} W = \Delta E = E_{\text{kin},2} - E_{\text{kin},1} \\ = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_2^2 - v_1^2) \end{aligned}$$

verrichtet.

23 Die Reibungsarbeit

- Die Reibungsarbeit wird von einem System verrichtet, wenn es sich (mit Reibung) bewegt.
- Wenn wir von Reibungsarbeit sprechen, meinen wir Gleit- oder Rollreibungskräfte (konstant).
- Es gilt:

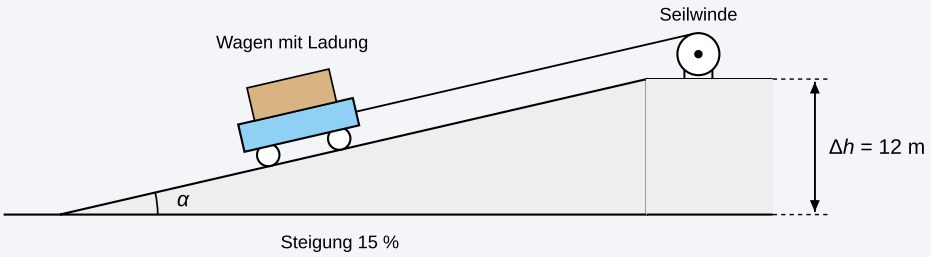
$$W_{\mathrm{R}} = -F_{\mathrm{R}} \cdot s$$

W_{R} ist immer negativ.

23.1 Übungen zu Arbeit

Übungsaufgabe 1

Auf einer Baustelle im Gebirge wird Material mit einer Seilwinde nach oben transportiert. Ein Wagen der Masse $m = 1{,}2\,\mathrm{t}$ ist mit $2{,}8\,\mathrm{t}$ Baumaterial beladen und wird gleichförmig eine schiefe Ebene hinaufgezogen. Die schiefe Ebene hat eine Steigung von 15 %. Dabei wird ein Höhenunterschied von 12 m überwunden. Die auftretende Reibungskraft beträgt 1500 N.



1. Berechnen Sie die Arbeit, die während der gleichförmigen Aufwärtsbewegung verrichtet wird.
2. Bestimmen Sie den prozentualen Anteil der Reibungsarbeit.
3. Stellen Sie die verrichtete Arbeit in einem quantitativ richtigen Diagramm dar. Kennzeichnen Sie den Anteil der Reibungsarbeit.
4. Bestimmen Sie aus dem Diagramm die verrichtete Arbeit und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem in 1. berechneten Wert.

Lösung zu Übungsaufgabe 1

geg.: Steigung: 15 %, $\Delta h = 12\,\mathrm{m}$, $m_{\mathrm{Wagen}} = 1{,}2\,\mathrm{t}$, $m_{\mathrm{Ladung}} = 2{,}8\,\mathrm{t}$, $F_{\mathrm{R}} = 1500\,\mathrm{N}$

ges.: W_{ges}, $\dfrac{W_{\mathrm{R}}}{W_{\mathrm{ges}}}$, W im Diagramm

Lös.:

Zu 1: Die Steigung gibt das Verhältnis von Höhenunterschied Δh zu waagerechter Strecke x an:

$$\Delta h = 0{,}15 \cdot x \quad \rightarrow \quad x = \frac{\Delta h}{0{,}15} = \frac{12\,\mathrm{m}}{0{,}15} = 80\,\mathrm{m}$$

$$\alpha = \arctan(0{,}15) = 8{,}53^{\circ}$$

$$s = \sqrt{\Delta h^2 + x^2} = \sqrt{(12\,\mathrm{m})^2 + (80\,\mathrm{m})^2} = 80{,}9\,\mathrm{m}$$

Die Zugkraft muss gegen die Reibungskraft die Arbeit $F_{\mathrm{R}} \cdot s$ verrichten:

$$W_{\mathrm{R}} = F_{\mathrm{R}} \cdot s$$

Für die Hubarbeit gilt:

$$W_{\mathrm{H}} = m_{\mathrm{ges}} \cdot g \cdot \Delta h = m_{\mathrm{ges}} \cdot g \cdot \sin(\alpha) \cdot s = F_{\mathrm{HA}} \cdot s$$

$$W_{\mathrm{ges}} = W_{\mathrm{R}} + W_{\mathrm{H}} = (F_{\mathrm{R}} + F_{\mathrm{HA}}) \cdot s$$

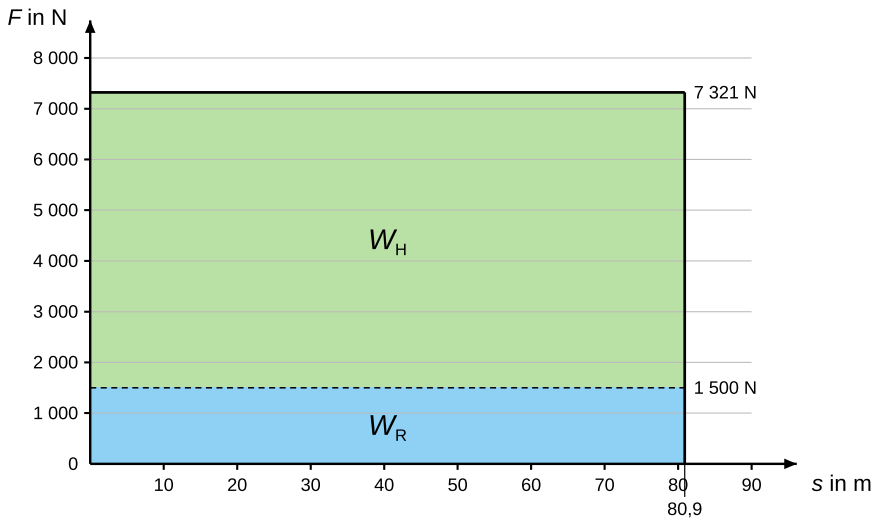
$$F_{\mathrm{HA}} = m_{\mathrm{ges}} \cdot g \cdot \sin(\alpha) = 4{,}0 \cdot 10^3\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \sin(8{,}53^\circ) = 5821\,\mathrm{N}$$

$$W_{\mathrm{ges}} = (1500\,\mathrm{N} + 5821\,\mathrm{N}) \cdot 80{,}9\,\mathrm{m} = 5{,}92 \cdot 10^5\,\mathrm{J} = 592\,\mathrm{kJ}$$

Zu 2:

$$\frac{W_{\mathrm{R}}}{W_{\mathrm{ges}}} = \frac{F_{\mathrm{R}} \cdot s}{(F_{\mathrm{R}} + F_{\mathrm{HA}}) \cdot s} = \frac{F_{\mathrm{R}}}{F_{\mathrm{ges}}} = \frac{1500\,\mathrm{N}}{7321\,\mathrm{N}} = 0{,}205 = 20{,}5\,\%$$

Zu 3:



Zu 4: Die Arbeit entspricht der Fläche unter dem Graphen:

$$W_{\mathrm{ges}} = 7321\,\mathrm{N} \cdot 80{,}9\,\mathrm{m} = 592\,\mathrm{kJ}$$

Das Ergebnis ist gleich dem in 1. berechneten Wert.

Größe	Ergebnis
s	$80{,}9\,\mathrm{m}$
F_{HA}	$5821\,\mathrm{N}$
W_{ges}	$592\,\mathrm{kJ}$
$W_{\mathrm{R}}/W_{\mathrm{ges}}$	$20{,}5\,\%$

Übungsaufgabe 2

Eine Joggerin läuft mit ihrem Hund. Beide haben die gleiche kinetische Energie, wobei der Hund schneller läuft. Wenn die Joggerin ihre Geschwindigkeit um 80 % erhöhen würde, dann wären beide gleich schnell. Die Joggerin hat eine Masse von 58 kg.

Berechnen Sie die Masse des Hundes.

Lösung zu Übungsaufgabe 2

geg.: $m_{\mathrm{J}} = 58\,\mathrm{kg}$, $v_{\mathrm{H}} = 1{,}8 \cdot v_{\mathrm{J}}$, E_{kin} ist gleich.

ges.: m_{H}

Lös.:

$$\frac{1}{2} \cdot m_\mathrm{J} \cdot v_\mathrm{J}^2 = \frac{1}{2} \cdot m_\mathrm{H} \cdot (1{,}8 \cdot v_\mathrm{J})^2$$

$$m_\mathrm{H} = \frac{m_\mathrm{J} \cdot v_\mathrm{J}^2}{1{,}8^2 \cdot v_\mathrm{J}^2} = \frac{58\,\mathrm{kg}}{1{,}8^2} = 17{,}9\,\mathrm{kg}$$

24 Der Energieerhaltungssatz und Systeme

24.1 Der Energieerhaltungssatz

„In einem abgeschlossenen System ist die Summe aller Energieformen erhalten: $\Delta E_{\text{System}} = 0$.“

Zwei weitere Formulierungen des Energieerhaltungssatzes:

- Für ein gegebenes System mit der Gesamtenergie E gilt: Die Änderung der Gesamtenergie ist die Differenz aus der Energie E_{ein}, die dem System zugeführt wird, und der Energie E_{aus}, die vom System abgegeben wird: $E_{\text{ein}} - E_{\text{aus}} = \Delta E$.
- Die Gesamtenergie des Universums ist konstant. Energie kann von einer Form in eine andere umgewandelt und von einem Ort an einen anderen übertragen werden. Sie kann aber nie erzeugt oder vernichtet werden.

24.2 Systeme

Ein System ist ein Objekt oder der Zusammenschluss von Objekten, der klar von einer Umgebung abgegrenzt ist.

Beispiele:

Eine Kaffeetasse:



→ Wasser verdampft → Teilchenaustausch mit der Umgebung

→ Der Kaffee kühlt ab → Energieaustausch mit der Umgebung

→ Dieses System ist ein offenes System.

Die Erde (mit Orbit) (wenn gerade kein Asteroid einschlägt):

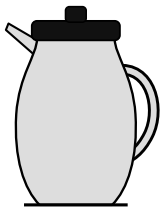


→ Im Normalfall findet kein Teilchenaustausch mit der Umgebung statt.

→ Die Erde tauscht Energie mit der Umgebung aus.

→ Dieses System ist ein geschlossenes System.

Eine perfekt isolierte Kanne:



→ Im Idealfall findet kein Teilchenaustausch und kein Energieaustausch statt.

→ Dieses System ist ein abgeschlossenes System.

24.3 Beispielaufgabe

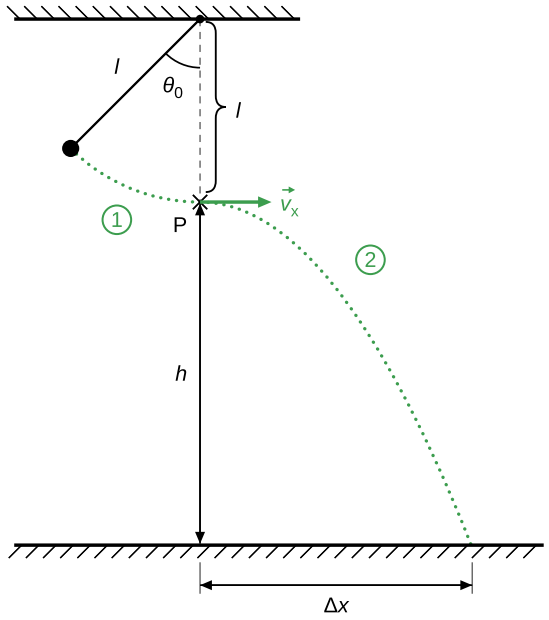
Beispielaufgabe

Ein Fadenpendel der Länge $l = 80\,\mathrm{cm}$ wird um 45° ausgelenkt und dann losgelassen. Im tiefsten Punkt P der Bahn reißt der Faden. Der Punkt P liegt 1,5 m über dem Boden.

Berechnen Sie, in welcher Entfernung der Pendelkörper auf dem Boden auftrifft. (Der Luftwiderstand wird vernachlässigt.)

geg.: $l = 80\,\mathrm{cm}$, $\theta_0 = 45°$, $h = 1{,}5\,\mathrm{m}$

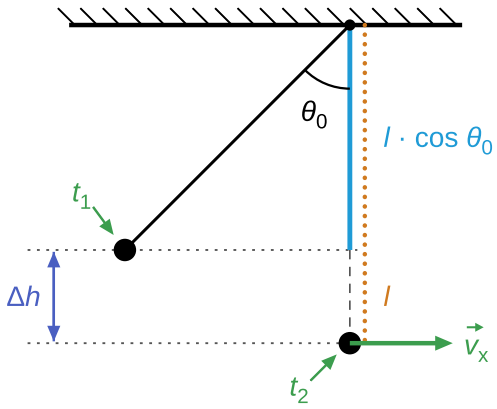
ges.: Δx



Ansatz: Wir zerlegen das Problem in zwei kleine Probleme:

① v_x finden

② die Wurfweite des waagerechten Wurfs bestimmen



Zu ①: geg.: $l = 0{,}80\,\mathrm{m}$, $\theta_0 = 45°$

ges.: v_x

Ansatz: Energieerhaltungssatz

$$E_{\text{ges},t_1} = E_{\text{ges},t_2}$$

$$E_{\text{pot},t_1} = E_{\text{pot},t_2} + E_{\text{kin},t_2}$$

$$m \cdot g \cdot (h + \Delta h) = m \cdot g \cdot h + \frac{m}{2} \cdot v_x^2$$

$$m \cdot g \cdot h + m \cdot g \cdot \Delta h = m \cdot g \cdot h + \frac{m}{2} \cdot v_x^2 \qquad | - m \cdot g \cdot h$$

$$m \cdot g \cdot \Delta h = \frac{m}{2} \cdot v_x^2 \qquad | : m$$

$$g \cdot \Delta h = \frac{1}{2} \cdot v_x^2 \qquad | \cdot 2$$

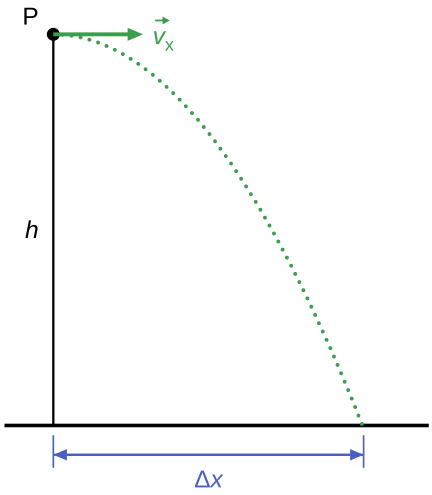
$$v_x^2 = 2 \cdot g \cdot \Delta h$$

$$v_x = \sqrt{2 \cdot g \cdot \Delta h}$$

Für die Höhe Δh gilt:

$$l = l \cdot \cos\theta_0 + \Delta h \quad \Rightarrow \quad \Delta h = l - l \cdot \cos\theta_0 = l \cdot (1 - \cos\theta_0)$$

$$v_x = \sqrt{2 \cdot g \cdot l \cdot (1 - \cos\theta_0)} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0{,}80\,\text{m} \cdot (1 - \cos(45°))} = 2{,}1\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$



Zu ②: geg.: $v_x = 2{,}1\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, $h = 1{,}5\,\text{m}$

ges.: Δx

Lös.:

$$y(t) = -\frac{g}{2} \cdot t^2 + h$$

$$x(t) = v_x \cdot t$$

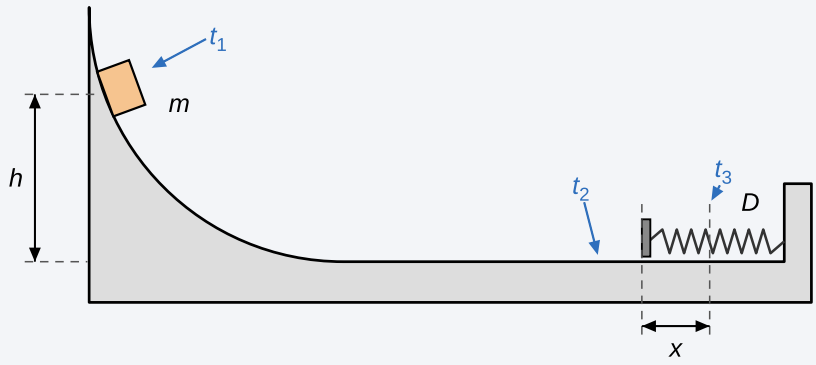
$$0 = -\frac{g}{2} \cdot t_\text{f}^2 + h \quad \Rightarrow \quad t_\text{f} = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}}$$

$$x(t_\text{f}) = v_x \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} = 2{,}1\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}5\,\text{m}}{9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 1{,}2\,\text{m}$$

24.4 Übungen

Übungsaufgabe 1

Ein Körper mit der Masse 2,00 kg wird in der Höhe 3,00 m losgelassen und gleitet eine gekrümmte, reibungsfreie Rampe hinab. Am Ende der anschließenden waagerechten, reibungsfreien Strecke befindet sich eine Feder mit der Federkonstanten $600\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$. Der Körper staucht die Feder um eine Strecke x, bei der er momentan zur Ruhe kommt.



a) Berechnen Sie die Strecke x.

b) Beschreiben Sie die Bewegung des Körpers, nachdem er momentan zur Ruhe kam.

Lösung zu Übungsaufgabe 1

geg.: $h = 3{,}00\,\mathrm{m}$, $m = 2{,}00\,\mathrm{kg}$, $D = 600\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$

ges.: x

Lös.:

Zu a) Ansatz:

$$E_{\mathrm{ges},t_1} = E_{\mathrm{ges},t_2} = E_{\mathrm{ges},t_3}$$

$$E_{\mathrm{pot}} = E_{\mathrm{kin}} = E_{\mathrm{Spann}}$$

$$m \cdot g \cdot h = \frac{m}{2} \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot D \cdot x^2$$

$$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot D \cdot x^2 \qquad | \cdot \frac{2}{D}$$

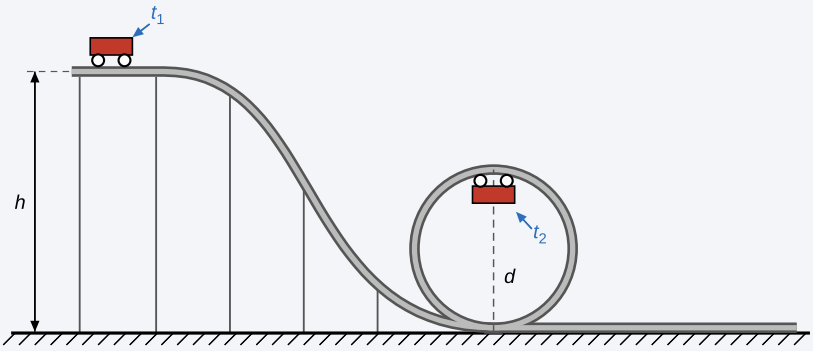
$$\frac{2 \cdot m \cdot g \cdot h}{D} = x^2$$

$$x = \sqrt{\frac{2 \cdot m \cdot g \cdot h}{D}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2{,}00\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 3{,}00\,\mathrm{m}}{600\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}}} = 0{,}44\,\mathrm{m}$$

Zu b) Der Körper wird von der Feder zurück beschleunigt und kommt am Ende wieder an der Höhe h an. Dort kehrt er um, und die Bewegung wiederholt sich.

Übungsaufgabe 2

Ein Achterbahnwagen mit der Masse 800 kg beginnt seine Fahrt in der Höhe $h = 32{,}0\,\mathrm{m}$ über dem Boden vor einem Looping mit dem Durchmesser $d = 20{,}0\,\mathrm{m}$. Die Reibung wird vernachlässigt.



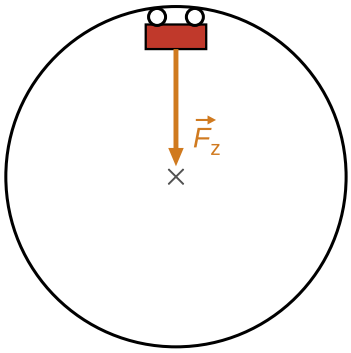
Berechnen Sie die nach unten gerichtete Kraft der Schienen auf den Wagen im höchsten Punkt des Loopings.

Lösung zu Übungsaufgabe 2

geg.: $m = 800\,\mathrm{kg}$, $h = 32{,}0\,\mathrm{m}$, $d = 20{,}0\,\mathrm{m} \rightarrow r = 10{,}0\,\mathrm{m}$

ges.: F_N

Lös.:



$$\vec{F}_z = \vec{F}_G + \vec{F}_N$$

Geschwindigkeit im höchsten Punkt (Energieerhaltungssatz):

$$E_{\mathrm{ges},t_1} = E_{\mathrm{ges},t_2}$$

$$m \cdot g \cdot h = m \cdot g \cdot d + \frac{m}{2} \cdot v^2 \qquad | : m \quad \text{und} \quad -g \cdot d$$

$$g \cdot h - g \cdot d = \frac{1}{2} \cdot v^2$$

$$g \cdot (h - d) = \frac{1}{2} \cdot v^2 \qquad | \cdot 2$$

$$v^2 = 2 \cdot g \cdot (h - d)$$

Zentripetalkraft (Kreisbewegung):

$$F_z = m \cdot \frac{v^2}{r} = \frac{m \cdot 2 \cdot g \cdot (h - d)}{r} = \frac{800\,\mathrm{kg} \cdot 2 \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (32{,}0\,\mathrm{m} - 20{,}0\,\mathrm{m})}{10{,}0\,\mathrm{m}} = 18{,}8\,\mathrm{kN}$$

Im höchsten Punkt zeigen die Gewichtskraft und die Kraft der Schienen beide nach unten:

$$F_z = F_G + F_N \qquad F_G = m \cdot g = 7{,}8\,\mathrm{kN}$$

$$F_{\mathrm{N}} = F_{\mathrm{z}} - F_{\mathrm{G}} = 18{,}8\,\mathrm{kN} - 7{,}8\,\mathrm{kN} = 11{,}0\,\mathrm{kN}$$

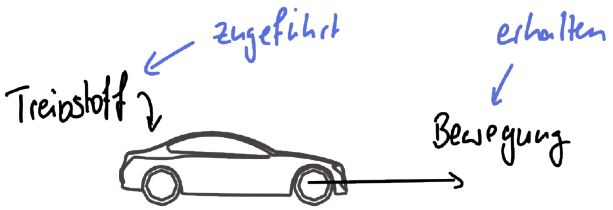
25 Der Wirkungsgrad

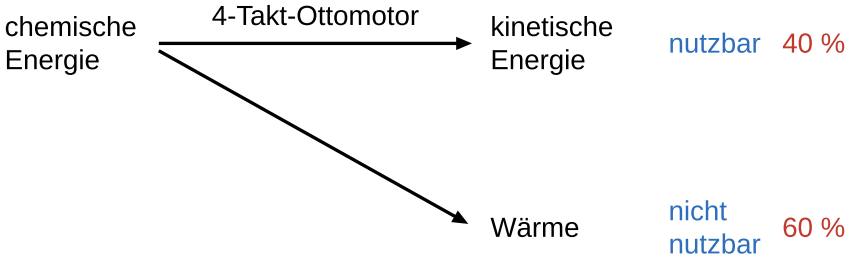
- Der Wirkungsgrad gibt an, welcher Anteil der zugeführten Energie nach einer Energieumwandlung tatsächlich nutzbar ist.
- Formelzeichen: η („eta“)

$$\eta = \frac{\text{erhaltene Energie}}{\text{zugeführte Energie}}$$

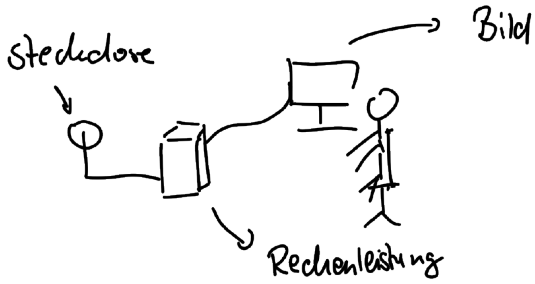
Die erhaltene Energie ist die „nutzbare Energie“.

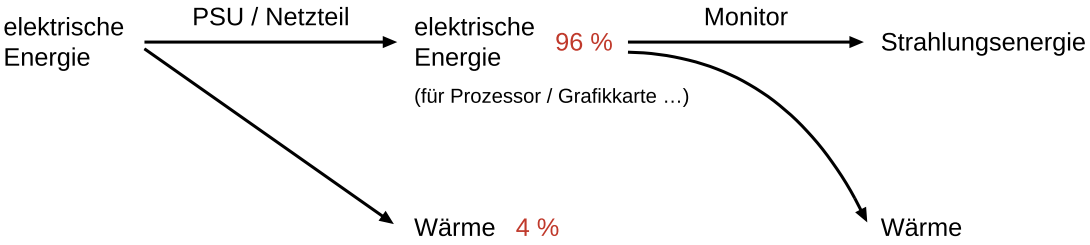
Beispiel:





Beispiel:





25.1 Perpetuum mobile

(perpetual motion machine)

→ Ein Perpetuum mobile ist eine Maschine mit einem Wirkungsgrad ≥ 100 %.

→ Maschinen mit $\eta > 1$ heißen Perpetuum mobile erster Art.

→ Ein Perpetuum mobile erster Art kann nicht existieren.

→ Es gibt keine Energieumwandlung mit $\eta > 1$.

→ Eine Maschine mit einem Wirkungsgrad von 1 heißt Perpetuum mobile zweiter Art.

→ Auch eine solche Maschine existiert nicht!

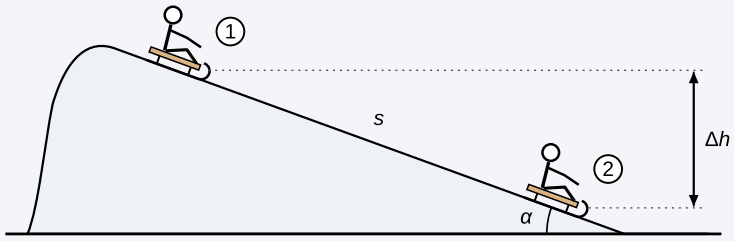
Ausblick: In der Thermodynamik werden die beiden Arten genauer unterschieden.

- Ein Perpetuum mobile erster Art ist eine Maschine, die mehr Energie abgibt, als ihr zugeführt wird, oder die Arbeit verrichtet, ohne dass ihr Energie zugeführt wird. Sie verstößt gegen den Energieerhaltungssatz (in der Thermodynamik: erster Hauptsatz).
- Ein Perpetuum mobile zweiter Art ist eine Maschine, die Wärme aus einem einzigen Wärmespeicher vollständig in Arbeit umwandelt. Sie verstößt nicht gegen den Energieerhaltungssatz, aber gegen den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik. Nach diesem Satz geht bei jeder Umwandlung von Wärme in Arbeit ein Teil der Wärme an die Umgebung über. Der zweite Hauptsatz wird in diesem Kurs nicht behandelt.

25.2 Übungsaufgaben Energie mit Reibung

Übungsaufgabe 1

Der Schlittenhang: Ein Kind auf einem Schlitten (Gesamtmasse 35 kg) rutscht aus der Ruhe heraus einen 12 m langen Hang hinunter, der einen Winkel von 20° zur Horizontalen bildet. Der Gleitreibungskoeffizient zwischen Schlitten und Schnee beträgt 0,15.



Berechnen Sie die Geschwindigkeit, die das Kind am Ende des Hangs hat.

Lösung zu Übungsaufgabe 1

geg.: $m = 35\,\mathrm{kg}$, $s = 12\,\mathrm{m}$, $\mu_{\mathrm{GR}} = 0{,}15$, $\alpha = 20°$

ges.: v_2

Lös.:

$$E_1 = E_2 - W$$

W ist die Arbeit, die vom System verrichtet wurde.

$$E_{\mathrm{pot},1} = E_{\mathrm{kin},2} - W_{\mathrm{R}}$$

Mit $\sin\alpha = \dfrac{\Delta h}{s}$, also $\Delta h = s \cdot \sin\alpha$, und $F_{\mathrm{GR}} = \mu_{\mathrm{GR}} \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha$ folgt:

$$m \cdot g \cdot \Delta h = \frac{m}{2} \cdot v_2^2 - (-F_{\mathrm{GR}}) \cdot s$$

$$m \cdot g \cdot \sin\alpha \cdot s = \frac{m}{2} \cdot v_2^2 + m \cdot g \cdot \cos\alpha \cdot \mu_{\mathrm{GR}} \cdot s \qquad | : m$$

$$g \cdot \sin\alpha \cdot s = \frac{1}{2} \cdot v_2^2 + g \cdot \cos\alpha \cdot \mu_{\mathrm{GR}} \cdot s \qquad | - g \cdot \cos\alpha \cdot \mu_{\mathrm{GR}} \cdot s$$

$$g \cdot \sin\alpha \cdot s - g \cdot \cos\alpha \cdot \mu_{\mathrm{GR}} \cdot s = \frac{1}{2} \cdot v_2^2$$

$$g \cdot s \cdot (\sin\alpha - \mu_{\mathrm{GR}} \cdot \cos\alpha) = \frac{1}{2} \cdot v_2^2$$

$$v_2^2 = 2 \cdot g \cdot s \cdot (\sin\alpha - \mu_{\mathrm{GR}} \cdot \cos\alpha)$$

$$v_2^2 = 2 \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 12\,\mathrm{m} \cdot (\sin(20^\circ) - 0{,}15 \cdot \cos(20^\circ)) = 47{,}3\,\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2$$

$$v_2 = 6{,}9\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Übungsaufgabe 2

Eine Berghütte soll mit einer Solaranlage ausgestattet werden. Am Standort der Hütte erreichen an einem wolkenlosen Tag tagsüber im Mittel $0{,}80\,\frac{\mathrm{kW}}{\mathrm{m}^2}$ die Erdoberfläche. Die Anlage soll tagsüber eine Wasserpumpe mit einer Leistung von 1,2 kW betreiben. Die Sonnenenergie wird mit einem Wirkungsgrad von 20 % in elektrische Energie umgewandelt.

Berechnen Sie die Fläche, die die Solarmodule mindestens haben müssen.

Lösung zu Übungsaufgabe 2

geg.: Leistung der Sonnenstrahlung je Fläche: $0{,}80\,\frac{\mathrm{kW}}{\mathrm{m}^2}$, $P_{\mathrm{nutz}} = 1{,}2\,\mathrm{kW}$, $\eta = 20\,\% = 0{,}20$

ges.: A

Lös.: Der Wirkungsgrad gilt genauso für die Leistungen, weil beide Energien in derselben Zeit umgesetzt werden:

$$\eta = \frac{P_{\mathrm{nutz}}}{P_{\mathrm{zu}}} \quad \Rightarrow \quad P_{\mathrm{zu}} = \frac{P_{\mathrm{nutz}}}{\eta} = \frac{1{,}2\,\mathrm{kW}}{0{,}20} = 6{,}0\,\mathrm{kW}$$

Diese Leistung muss die Sonne auf die Fläche A einstrahlen:

$$P_{\mathrm{zu}} = 0{,}80\,\frac{\mathrm{kW}}{\mathrm{m}^2} \cdot A \quad \Rightarrow \quad A = \frac{6{,}0\,\mathrm{kW}}{0{,}80\,\frac{\mathrm{kW}}{\mathrm{m}^2}} = 7{,}5\,\mathrm{m}^2$$

Übungsaufgabe 3

An einem Rodelhang wird ein Schlittenlift geplant. Er soll jederzeit bis zu 40 Schlitten mit je einem Kind einen 250 m langen und um 12° zur Horizontalen geneigten Hang hinaufziehen können. Die Geschwindigkeit beträgt $1{,}50\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, und der Gleitreibungskoeffizient zwischen Schlitten und Schnee liegt bei 0,10. Die Masse eines Schlittens mit Kind wird zu durchschnittlich 45,0 kg angenommen.

Berechnen Sie die Leistung, für die der Motor des Lifts mindestens ausgelegt werden muss. Sicherheitshalber soll der Motor aber eine Nennleistung von 40 % über der notwendigen Mindestleistung haben. Geben Sie auch diese Nennleistung an.

Lösung zu Übungsaufgabe 3

geg.: $s = 250\,\mathrm{m}$, $\alpha = 12^\circ$, $n = 40$, $\overline{m} = 45{,}0\,\mathrm{kg}$, $v = 1{,}50\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $\mu_{\mathrm{GR}} = 0{,}10$, $P = 1{,}4 \cdot P_{\mathrm{min}}$

ges.: $P_{\min}$, P

Lös.:

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

→ Pro Sekunde legt ein Schlitten auf dem Hang den Weg $s_1 = 1{,}50\,\mathrm{m}$ zurück und gewinnt dabei die Höhe

$$\Delta h = s_1 \cdot \sin\alpha = 1{,}50\,\mathrm{m} \cdot \sin(12^\circ) = 0{,}31\,\mathrm{m}$$

→ Pro Sekunde werden 40 Schlitten 0,31 m angehoben:

$$\Delta E_{\mathrm{pot,ges}} = n \cdot \overline{m} \cdot g \cdot \Delta h = 40 \cdot 45{,}0\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 0{,}31\,\mathrm{m} = 5{,}5\,\mathrm{kJ}$$

→ Pro Sekunde werden 40 Schlitten mit konstanter Geschwindigkeit trotz Reibung 1,50 m weit bewegt:

$$|W_{\mathrm{R}}| = |F_{\mathrm{GR}}| \cdot s_1 = n \cdot \overline{m} \cdot g \cdot \cos\alpha \cdot \mu_{\mathrm{GR}} \cdot s_1$$

$$|W_{\mathrm{R}}| = 40 \cdot 45{,}0\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \cos(12^\circ) \cdot 0{,}10 \cdot 1{,}50\,\mathrm{m} = 2{,}6\,\mathrm{kJ}$$

→ Gesamte Arbeit in einer Sekunde:

$$W_{\mathrm{ges}} = \Delta E_{\mathrm{pot}} + |W_{\mathrm{R}}| = 8{,}1\,\mathrm{kJ}$$

$$P_{\min} = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{W_{\mathrm{ges}}}{1\,\mathrm{s}} = 8{,}1\,\mathrm{kW}$$

$$P = 1{,}4 \cdot P_{\min} = 11{,}3\,\mathrm{kW}$$

Größe	Ergebnis
$P_{\min}$	8,1 kW
P	11,3 kW

Übungsaufgabe 4

Ein Stein mit der Masse 1,5 kg wird mit der Geschwindigkeit $30\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ senkrecht nach oben geschleudert. Er erreicht wegen des Luftwiderstands nur eine Höhe von 35 m und fällt anschließend wieder zu Boden.

a) Berechnen Sie die kinetische Energie des Steins am Anfang.

b) Berechnen Sie, wie stark die thermische Energie durch die Reibung während des Aufstiegs zunimmt.

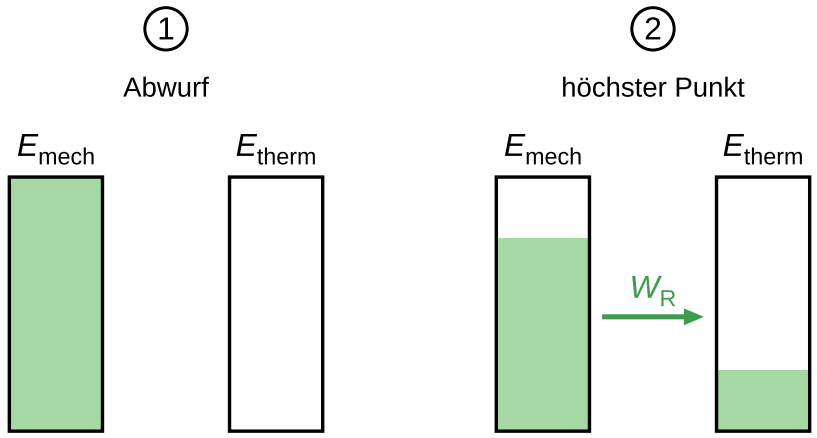
c) Beim Fallen beträgt die Zunahme der thermischen Energie durch den Luftwiderstand nur 60 % der Zunahme beim Steigen. Berechnen Sie die Geschwindigkeit, mit der der Stein auf dem Boden aufschlägt.

Lösung zu Übungsaufgabe 4

geg.: $v_0 = 30\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $m = 1{,}5\,\mathrm{kg}$, $h_{\max} = 35\,\mathrm{m}$

ges.: E_{kin}, $|W_{\mathrm{R}}|$, v

Lös.:



Zu a) Am Anfang ($h = 0$) besteht die mechanische Energie nur aus kinetischer Energie:

$$E_{\mathrm{mech},1} = E_{\mathrm{kin}} = \frac{m}{2} \cdot v_0^2 = \frac{1{,}5\,\mathrm{kg}}{2} \cdot \left(30\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 = 675\,\mathrm{J}$$

Zu b) Im höchsten Punkt besteht die mechanische Energie nur aus potenzieller Energie:

$$E_{\mathrm{mech},2} = E_{\mathrm{pot}} = m \cdot g \cdot h_{\mathrm{max}} = 1{,}5\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 35\,\mathrm{m} = 515\,\mathrm{J}$$

$$|W_{\mathrm{R}}| = |\Delta E_{\mathrm{mech}}| = 675\,\mathrm{J} - 515\,\mathrm{J} = 160\,\mathrm{J}$$

Die thermische Energie nimmt beim Aufstieg um 160 J zu.

Zu c) Beim Fallen nimmt die mechanische Energie um 60 % dieses Betrags ab:

$$|\Delta E_{\mathrm{mech}}| = 0{,}60 \cdot 160\,\mathrm{J} = 96\,\mathrm{J}$$

$$E_{\mathrm{mech},3} = 515\,\mathrm{J} - 96\,\mathrm{J} = 419\,\mathrm{J} = \frac{m}{2} \cdot v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot E_{\mathrm{mech},3}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 419\,\mathrm{J}}{1{,}5\,\mathrm{kg}}} = 23{,}6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Größe	Ergebnis
E_{kin} am Anfang	675 J
Zunahme der thermischen Energie	160 J
v beim Aufschlag	23,6 m/s

26 Der Impuls

engl.: linear momentum

Der Impuls ist eine physikalische Größe, die den Bewegungszustand eines Körpers beschreibt.

Formelzeichen: $\vec{p}$ (kleines P), vektorielle Größe

Definition:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

$$[p] = 1\,\mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 1\,\mathrm{N} \cdot \mathrm{s}$$

→ Der Zusammenhang zwischen Kraft und Impuls:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(m \cdot \vec{v})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{p} = \int \vec{F}\,\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}\vec{p} = \vec{F} \cdot \mathrm{d}t$$

$$\Delta\vec{p} = \vec{F} \cdot \Delta t$$

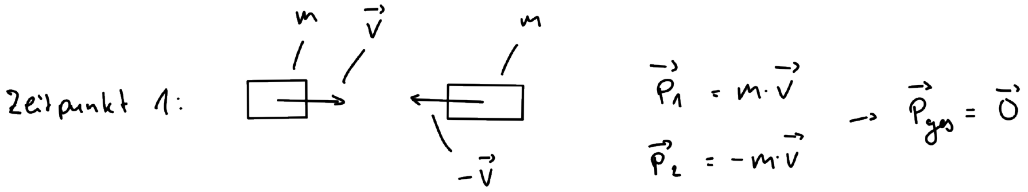
26.1 Der Impulserhaltungssatz

Der Gesamtimpuls eines Systems, auf das keine äußeren Kräfte wirken, bleibt erhalten.

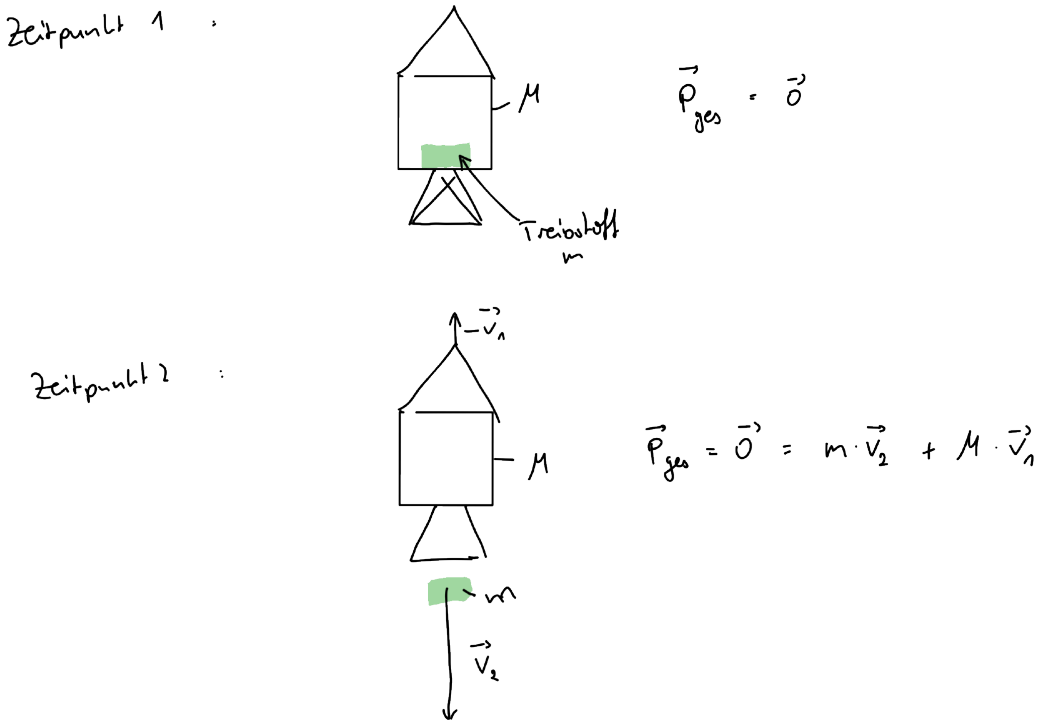
$$\vec{p}_{\mathrm{ges}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots$$

$$\Delta\vec{p}_{\mathrm{ges}} = \vec{0}$$

Bsp.:







26.2 Übungen

Übungsaufgabe 1

Zwei lange Güterzüge fahren auf parallelen Gleisen in dieselbe Richtung, der eine mit $18\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$, der andere mit $36\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Während sie nebeneinander fahren, wird Getreide mit einer Rate von $1500\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{min}}$ vom langsameren auf den schnelleren Zug geschaufelt. Das Schaufeln erfolgt genau seitlich, und die Reibungskräfte an den Zügen hängen nicht von der Masse der Züge ab.

Berechnen Sie die zusätzliche Kraft, die von der Lokomotive

a) des schnelleren Zuges und

b) des langsameren Zuges

aufgebracht werden muss, damit sich die Geschwindigkeiten der Züge nicht ändern.

Lösung zu Übungsaufgabe 1

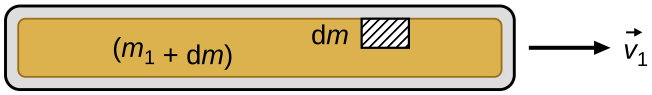
geg.: $v_1 = 18\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ (langsamerer Zug), $v_2 = 36\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ (schnellerer Zug), $\frac{\mathrm{d}m}{\Delta t} = 1500\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{min}}$

ges.: F für beide Züge

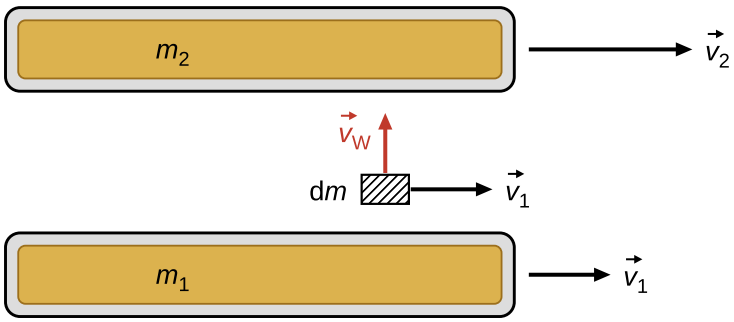
Lös.:



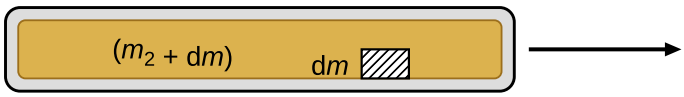
Zeitpunkt 1:



Zeitpunkt 2:



Zeitpunkt 3:



Zu a): Zum Zeitpunkt 2 hat das Getreide $\mathrm{d}m$ in Fahrtrichtung noch die Geschwindigkeit $\vec{v}_1$ des langsameren Zuges. Zum Zeitpunkt 3 liegt es auf dem schnelleren Zug. Ohne zusätzliche Kraft gilt der Impulserhaltungssatz, und der schnellere Zug wird langsamer:

$$\vec{p}_{\mathrm{ges}} = (m_2 + \mathrm{d}m) \cdot \vec{v}\,' = m_2 \cdot \vec{v}_2 + \mathrm{d}m \cdot \vec{v}_1$$

Ziel: Der Zug soll weiter mit $\vec{v}_2$ fahren. Dazu muss die Lokomotive den Impuls $\Delta\vec{p}$ zuführen:

$$\vec{p}_{\mathrm{ges}}\,' = (m_2 + \mathrm{d}m) \cdot \vec{v}_2 = \vec{p}_{\mathrm{ges}} + \Delta\vec{p}$$

$$\begin{aligned}
(m_2 + \mathrm{d}m) \cdot \vec{v}_2 &= m_2 \cdot \vec{v}_2 + \mathrm{d}m \cdot \vec{v}_1 + \Delta\vec{p} \\
m_2 \cdot \vec{v}_2 + \mathrm{d}m \cdot \vec{v}_2 &= m_2 \cdot \vec{v}_2 + \mathrm{d}m \cdot \vec{v}_1 + \Delta\vec{p} \\
\Delta\vec{p} &= \mathrm{d}m \cdot \vec{v}_2 - \mathrm{d}m \cdot \vec{v}_1 \\
\Delta\vec{p} &= \mathrm{d}m \cdot (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \\
\vec{F} \cdot \Delta t &= \mathrm{d}m \cdot (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \qquad | : \Delta t \\
\vec{F} &= \frac{\mathrm{d}m}{\Delta t} \cdot \Delta\vec{v}
\end{aligned}$$

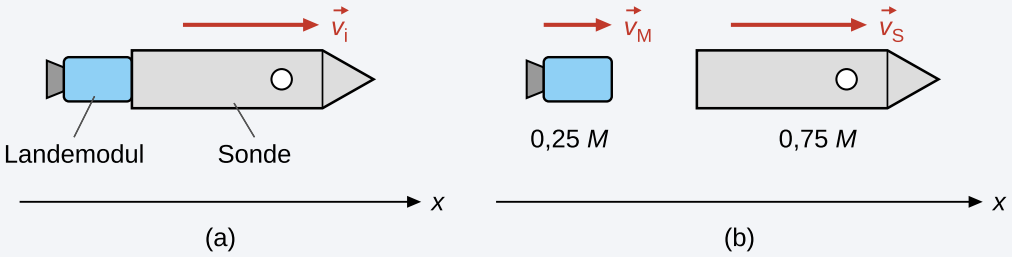
$$F = \frac{1500\,\mathrm{kg}}{60\,\mathrm{s}} \cdot 18\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 25\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}} \cdot 5{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 125\,\mathrm{N}$$

Zu b): Das Getreide verlässt den langsameren Zug genau seitlich. In Fahrtrichtung behält es dabei die Geschwindigkeit $\vec{v}_1$. Der Impuls des langsameren Zuges in Fahrtrichtung ändert sich nur durch die abnehmende Masse, seine Geschwindigkeit bleibt gleich. Es ist keine zusätzliche Kraft nötig: $F = 0$.

Zug	zusätzliche Kraft
schnellerer Zug	125 N
langsamerer Zug	0

Übungsaufgabe 2

Eindimensionale Explosion: Eine Raumsonde und ihr Landemodul haben zusammen die Masse M. Sie bewegen sich im freien Weltraum entlang der x-Achse mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_\mathrm{i} = 7200\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ relativ zur Sonne. Durch eine kleine Explosion stößt die Sonde das Landemodul ab, das die Masse $0{,}25 \cdot M$ besitzt. Die Sonde bewegt sich danach entlang der x-Achse $800\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ schneller als das Modul.



Berechnen Sie die Geschwindigkeit der Sonde relativ zur Sonne nach der Trennung.

Lösung zu Übungsaufgabe 2

geg.: $m_\mathrm{M} = 0{,}25 \cdot M$, $m_\mathrm{S} = 0{,}75 \cdot M$, $v_\mathrm{i} = 7200\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$, $v_\mathrm{S} = v_\mathrm{M} + 800\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$

ges.: v_S

Lös.:

$$\vec{p}_\mathrm{ges} = \text{const.}$$

$$M \cdot v_\mathrm{i} = m_\mathrm{M} \cdot v_\mathrm{M} + m_\mathrm{S} \cdot v_\mathrm{S}$$

$$M \cdot v_\mathrm{i} = 0{,}25 \cdot M \cdot \left(v_\mathrm{S} - 800\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\right) + 0{,}75 \cdot M \cdot v_\mathrm{S} \qquad |:M$$

$$v_\mathrm{i} = 0{,}25 \cdot v_\mathrm{S} - 200\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} + 0{,}75 \cdot v_\mathrm{S} \qquad |+200\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

$$v_\mathrm{i} + 200\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 0{,}25 \cdot v_\mathrm{S} + 0{,}75 \cdot v_\mathrm{S} = v_\mathrm{S}$$

$$v_\mathrm{S} = 7200\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} + 200\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 7400\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

Das Landemodul hat danach die Geschwindigkeit $v_\mathrm{M} = v_\mathrm{S} - 800\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 6600\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

27 Der Kraftstoß

engl.: impulse

27.1 Was ist ein Stoß?

→ Unter einem Stoß versteht man ein isoliertes Ereignis, während dessen zwei oder mehr Körper für relativ kurze Zeit relativ starke Kräfte aufeinander ausüben.

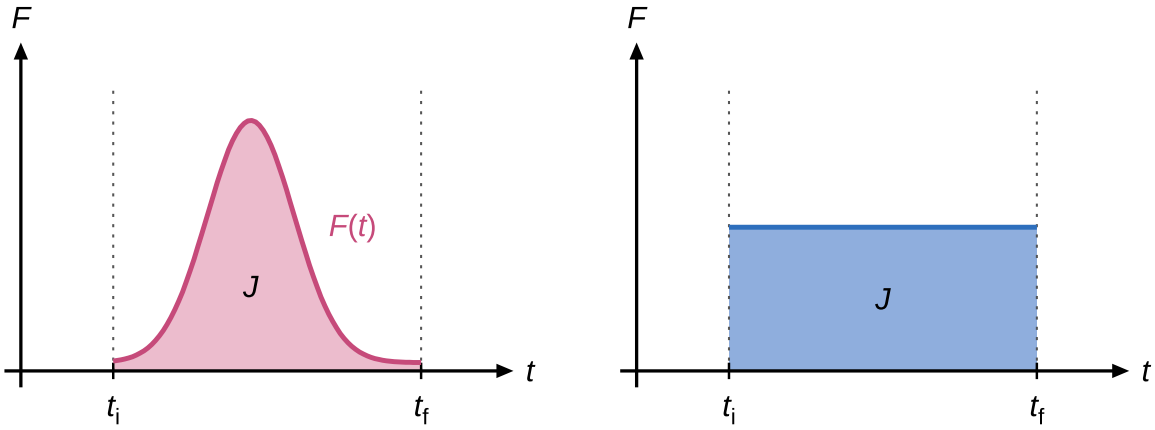
$$\mathrm{d}\vec{p} = \vec{F}(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\int_{\vec{p}_\mathrm{i}}^{\vec{p}_\mathrm{f}} \mathrm{d}\vec{p} = \int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}} \vec{F}(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\vec{J} = \int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}} \vec{F}(t)\,\mathrm{d}t$$

$\vec{J}$ heißt Kraftstoß oder Impulsübertrag.

$$\vec{J} = \Delta\vec{p} = \vec{p}_\mathrm{f} - \vec{p}_\mathrm{i}$$



Für eine beliebige Kraft $F(t)$ (links) gilt:

$$J = \int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}} F(t)\,\mathrm{d}t$$

→ Wenn $F(t) = \mathrm{const.}$ (rechts), gilt:

$$J = F \cdot \Delta t$$

27.2 Übungen

Übungsaufgabe 1

Eine Klippenspringerin springt aus einer Höhe von 20 m ins Meer. Im Wasser wird sie bis zum Stillstand abgebremst.

Schätzen Sie die Masse der Springerin und bestimmen Sie den Betrag des Kraftstoßes (Impulsübertrags), den das Wasser auf sie ausübt. Vernachlässigen Sie den Luftwiderstand.

Lösung zu Übungsaufgabe 1

geg.: $h = 20\,\mathrm{m}$

ges.: Δp

Lös.:

① Geschwindigkeit beim Eintauchen:

$$E_{\text{pot}} = E_{\text{kin}}$$
$$m \cdot g \cdot h = \frac{m}{2} \cdot v_{\text{i}}^2$$
$$v_{\text{i}} = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

② Stillstand → $v_{\text{f}} = 0$

$$J = p_{\text{f}} - p_{\text{i}} = 0 - m \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

Schätzung: $m = 60\,\text{kg}$

$$|J| = 60\,\text{kg} \cdot \sqrt{2 \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 20\,\text{m}} = 1{,}2 \cdot 10^3\,\text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Mit einer anderen geschätzten Masse ändert sich das Ergebnis im selben Verhältnis.

Übungsaufgabe 2

Ein Hammerkopf mit der Masse 0,50 kg trifft mit einer Geschwindigkeit von $8{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ auf einen Nagel und kommt während des 2,0 ms dauernden Stoßes zum Stillstand. Der Hammerkopf wird während des Aufpralls als unabhängig vom Stiel und von der Hand betrachtet.

Bestimmen Sie die Beträge

a) des Kraftstoßes (Impulsübertrags) und

b) der durchschnittlichen Kraft, die der Nagel auf den Hammerkopf ausübt.

Lösung zu Übungsaufgabe 2

geg.: $v_{\text{i}} = 8{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, $v_{\text{f}} = 0$, $\Delta t = 2{,}0 \cdot 10^{-3}\,\text{s}$, $m = 0{,}50\,\text{kg}$

ges.: J, $\overline{F}$

Lös.:

Zu a):

$$J = \Delta p = m \cdot \Delta v = 0{,}50\,\text{kg} \cdot \left| -\,8{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \right| = 4{,}0\,\text{N} \cdot \text{s}$$

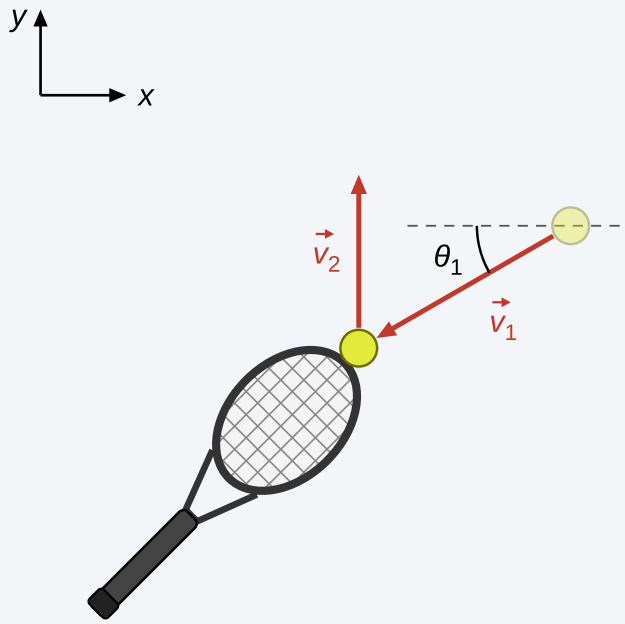
Zu b):

$$\Delta p = \overline{F} \cdot \Delta t \quad \Rightarrow \quad \overline{F} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{4{,}0\,\text{N} \cdot \text{s}}{2{,}0 \cdot 10^{-3}\,\text{s}} = 2000\,\text{N}$$

Größe	Ergebnis
J	4,0 N·s
$\overline{F}$	2000 N

Übungsaufgabe 3

Die Abbildung zeigt einen Tennisball mit der Masse 0,058 kg unmittelbar vor und unmittelbar nach dem Zusammenstoß mit einem Schläger. Direkt davor hat der Ball die Geschwindigkeit $\vec{v}_1$ mit dem Betrag $20{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ und dem Winkel $\theta_1 = 30{,}0°$. Direkt danach bewegt er sich senkrecht nach oben mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_2$ vom Betrag $15{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Die Dauer des Stoßes beträgt 4,00 ms.



Bestimmen Sie

a) den Betrag des Kraftstoßes (Impulsübertrags), den der Schläger auf den Ball ausübt,

b) dessen Richtung (relativ zur positiven x-Achse),

c) den Betrag der durchschnittlichen Kraft, die der Schläger auf den Ball ausübt,

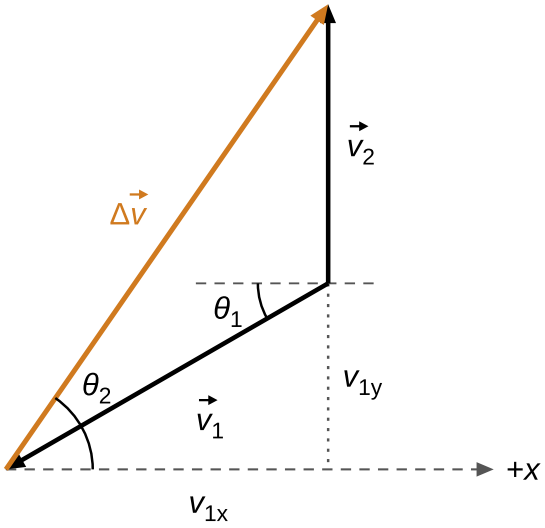
d) ihre Richtung.

Lösung zu Übungsaufgabe 3

geg.: $m = 0{,}058\,\mathrm{kg}$, $v_1 = 20{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $\theta_1 = 30{,}0°$, $v_2 = 15{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $\Delta t = 4{,}00 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{s}$

ges.: J, θ_2, $\overline{F}$

Lös.:



Zu a): Mit dem Kosinussatz:

$$\Delta v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2 \cdot v_1 \cdot v_2 \cdot \cos(90° + \theta_1)}$$

oder über die Komponenten:

$$v_{1x} = v_1 \cdot \cos\theta_1 \qquad v_{1y} = v_1 \cdot \sin\theta_1$$

$$\Delta v_x = |v_{1x}| = 20{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \cos(30{,}0°) = 17{,}3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$\Delta v_y = v_2 + |-v_{1y}| = 15{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 20{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \sin(30{,}0°) = 25{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$\Delta v = \sqrt{\Delta v_x^2 + \Delta v_y^2} = 30{,}4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$J = m \cdot \Delta v = 0{,}058\,\mathrm{kg} \cdot 30{,}4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 1{,}76\,\mathrm{N \cdot s}$$

Zu b):

$$\tan(\theta_2) = \frac{\Delta v_y}{\Delta v_x} \quad \Rightarrow \quad \theta_2 = \arctan\left(\frac{25{,}0}{17{,}3}\right) = 55{,}3°$$

Zu c):

$$\vec{J} = \overline{\vec{F}} \cdot \Delta t \quad \Rightarrow \quad \overline{\vec{F}} = \frac{\vec{J}}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$$

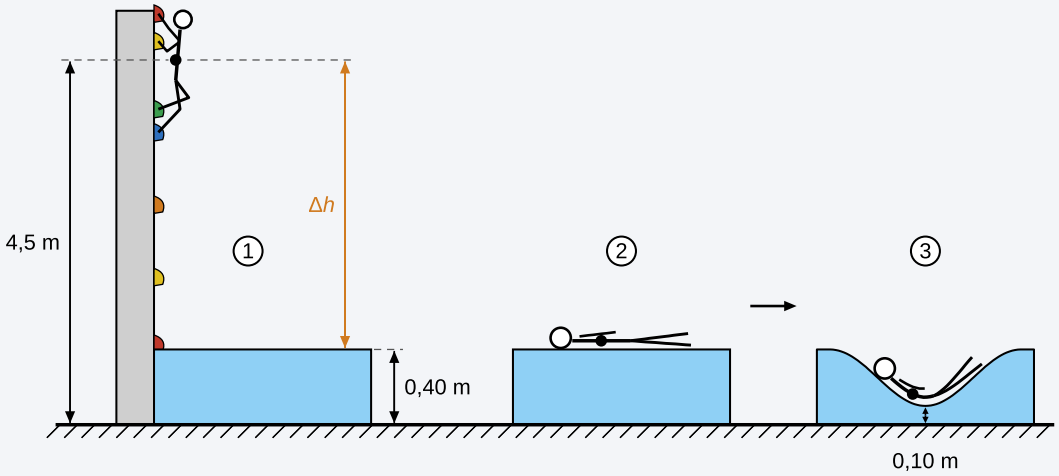
$$\overline{F} = \frac{1{,}76\,\mathrm{N \cdot s}}{4{,}00 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{s}} = 441\,\mathrm{N}$$

Zu d): Die durchschnittliche Kraft hat dieselbe Richtung wie der Kraftstoß: 55,3° über der positiven x-Achse.

Größe	Ergebnis
J	1,76 N·s
Richtung von $\vec{J}$ und $\overline{\vec{F}}$	55,3° über der positiven x-Achse
$\overline{F}$	441 N

Übungsaufgabe 4

In einer Kletterhalle liegt unter der Boulderwand eine Weichbodenmatte mit einer Dicke von 0,40 m. Sie wird auf etwa 0,10 m zusammengedrückt, wenn eine Person darauf zur Ruhe kommt. Eine Kletterin lässt sich aus einer Höhe von 4,5 m über dem Boden fallen.



a) Berechnen Sie die Zeit, in der die Kletterin von der Matte bis zum Stillstand abgebremst wird.

b) Berechnen Sie diese Zeit für den Fall, dass statt der Weichbodenmatte nur eine 8,0 cm dicke Turnmatte liegt, die sich beim Aufprall auf 3,0 cm zusammendrückt.

c) Vergleichen Sie die durchschnittlichen Kräfte auf die Kletterin in beiden Fällen.

Lösung zu Übungsaufgabe 4

geg.: Fallhöhe über dem Boden 4,5 m; a) Matte 0,40 m, zusammengedrückt 0,10 m; b) Matte 0,080 m, zusammengedrückt 0,030 m

ges.: Δt

Lös.:

Was weiß ich?

$$E_{\mathrm{pot},1} = E_{\mathrm{kin},2} \qquad E_{\mathrm{kin},3} = 0$$

Zwischen ① und ②:

$$m \cdot g \cdot \Delta h = \frac{m}{2} \cdot v_{\mathrm{m}}^2 \quad \Rightarrow \quad v_{\mathrm{m}}^2 = 2 \cdot g \cdot \Delta h \quad \Rightarrow \quad v_{\mathrm{m}} = \sqrt{2 \cdot g \cdot \Delta h}$$

Zwischen ② und ③ nimmt die Matte die kinetische Energie auf. Mit $\Delta v = 0 - v_{\mathrm{m}}$ und dem (negativen) Weg Δs gilt für die Beträge:

$$E_{\mathrm{kin},2} = |W| = \overline{F} \cdot |\Delta s| \quad \Rightarrow \quad \frac{m}{2} \cdot v_{\mathrm{m}}^2 = \overline{F} \cdot |\Delta s|$$

Aus dem Kraftstoß folgt die durchschnittliche Kraft:

$$\Delta \vec{p} = \vec{J} \quad \Rightarrow \quad m \cdot |\Delta v| = \overline{F} \cdot \Delta t \quad \Rightarrow \quad \overline{F} = m \cdot \frac{v_{\mathrm{m}}}{\Delta t}$$

Einsetzen:

$$\frac{m}{2} \cdot v_\mathrm{m}^2 = m \cdot \frac{v_\mathrm{m}}{\Delta t} \cdot |\Delta s| \qquad | \cdot \frac{2 \cdot \Delta t}{m \cdot v_\mathrm{m}^2}$$

$$\Delta t = \frac{2 \cdot |\Delta s|}{v_\mathrm{m}}$$

Zu a): $\Delta h = 4{,}5\,\mathrm{m} - 0{,}40\,\mathrm{m} = 4{,}1\,\mathrm{m}$, $|\Delta s| = 0{,}40\,\mathrm{m} - 0{,}10\,\mathrm{m} = 0{,}30\,\mathrm{m}$

$$\Delta t = \frac{2 \cdot 0{,}30\,\mathrm{m}}{\sqrt{2 \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 4{,}1\,\mathrm{m}}} = \frac{0{,}60\,\mathrm{m}}{9{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 0{,}067\,\mathrm{s}$$

Das ist die Zeit zum Abbremsen.

Zu b): $\Delta h = 4{,}5\,\mathrm{m} - 0{,}080\,\mathrm{m} = 4{,}42\,\mathrm{m}$, $|\Delta s| = 0{,}080\,\mathrm{m} - 0{,}030\,\mathrm{m} = 0{,}050\,\mathrm{m}$

$$\Delta t = \frac{2 \cdot 0{,}050\,\mathrm{m}}{\sqrt{2 \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 4{,}42\,\mathrm{m}}} = \frac{0{,}10\,\mathrm{m}}{9{,}3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 0{,}011\,\mathrm{s}$$

Zu c): Für die durchschnittliche Kraft gilt $\overline{F} = m \cdot \frac{v_\mathrm{m}}{\Delta t}$. Die Geschwindigkeiten v_m sind in beiden Fällen fast gleich, die Bremszeit ist auf der Turnmatte aber etwa sechsmal kürzer:

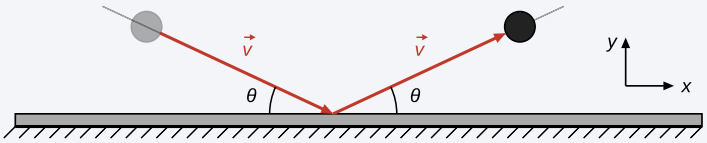
$$\frac{\overline{F}_\mathrm{b}}{\overline{F}_\mathrm{a}} = \frac{9{,}3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{0{,}011\,\mathrm{s}} : \frac{9{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{0{,}067\,\mathrm{s}} \approx 6{,}5$$

Die durchschnittliche Kraft auf die Kletterin ist auf der dünnen Turnmatte etwa 6,5-mal so groß wie auf der Weichbodenmatte. Je länger der Bremsweg und damit die Bremszeit, desto kleiner ist die Kraft.

Größe	Ergebnis
Δt (Weichbodenmatte)	0,067 s
Δt (Turnmatte)	0,011 s
Verhältnis der Kräfte	etwa 6,5

Übungsaufgabe 5

In der Draufsicht trifft ein Eishockey-Puck der Masse 170 g mit einer Geschwindigkeit von $12\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ auf die Bande. Der Winkel zwischen der Bahn des Pucks und der Bande beträgt $\theta = 25°$. Der Puck prallt mit demselben Betrag der Geschwindigkeit und demselben Winkel zurück. Er ist 8,0 ms lang in Kontakt mit der Bande.



a) Berechnen Sie den Betrag des Kraftstoßes, den der Puck von der Bande erfährt.

b) Geben Sie die Richtung dieses Kraftstoßes an.

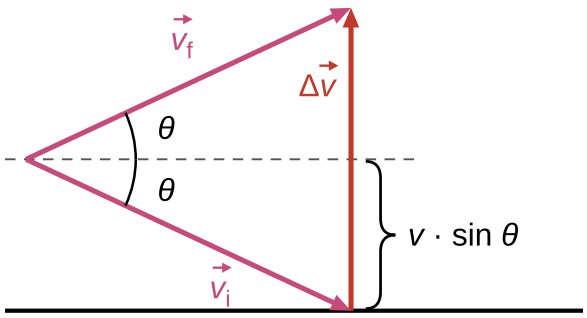
c) Berechnen Sie die durchschnittliche Kraft, die der Puck auf die Bande ausübt.

Lösung zu Übungsaufgabe 5

geg.: $m = 170\,\mathrm{g} = 0{,}170\,\mathrm{kg}$, $v = 12\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $\theta = 25°$, $\Delta t = 8{,}0 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{s}$

ges.: J, Richtung von $\vec{J}$, $\overline{F}$

Lös.:



Zu a):

$$\Delta v = 2 \cdot v \cdot \sin\theta = 2 \cdot 12\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \sin(25^\circ) = 10{,}1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$J = |\Delta\vec{p}| = m \cdot |\Delta\vec{v}| = 0{,}170\,\mathrm{kg} \cdot 10{,}1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 1{,}7\,\mathrm{N \cdot s}$$

Zu b): Der Kraftstoß hat die Richtung von $\Delta\vec{v}$. Er zeigt senkrecht zur Bande, von der Bande weg (positive y-Richtung).

Zu c):

$$|\Delta\vec{p}| = \overline{F} \cdot \Delta t \quad \Rightarrow \quad \overline{F} = \frac{m \cdot |\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \frac{1{,}72\,\mathrm{N \cdot s}}{8{,}0 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{s}} = 216\,\mathrm{N}$$

Das ist der Betrag der Kraft der Bande auf den Puck. Nach dem Wechselwirkungsprinzip übt der Puck eine gleich große, entgegengesetzte Kraft auf die Bande aus: 216 N, senkrecht in die Bande hinein.

Größe	Ergebnis
J	1,7 N·s, senkrecht von der Bande weg
$\overline{F}$ auf die Bande	216 N, senkrecht in die Bande hinein

28 Systeme mit veränderlicher Masse: Eine Rakete

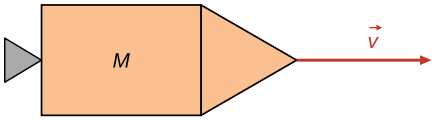
- Beim Start macht der Treibstoff in den Tanks den Großteil der Masse des Systems aus. Dieser Treibstoff wird vollständig verbrannt und heiße Gasteilchen werden ausgestoßen.

→ Die Masse der Rakete verändert sich.

28.1 Berechnung der Beschleunigung einer Rakete

- Wir stellen uns vor, wir befinden uns im Weltall in Ruhe zu einem Inertialsystem und beobachten, wie eine Rakete beschleunigt.

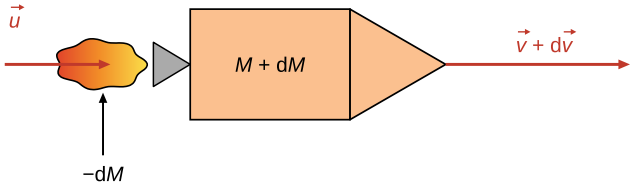
Zeitpunkt: $t = 0$



→ Es gibt weder Gravitation noch Reibung.

→ M ist die Masse der Rakete, v ihre Geschwindigkeit.

Zeitpunkt: $t = \mathrm{d}t$



→ Nach der Zeitspanne $\mathrm{d}t$ hat die Rakete den Geschwindigkeitsbetrag $v + \mathrm{d}v$, die Masse $M + \mathrm{d}M$ ($\mathrm{d}M$ ist negativ), es wurde Treibstoff der Masse $-\mathrm{d}M$ ausgestoßen, in unserem Inertialsystem hat dieser die Geschwindigkeit u.

Wenn wir das System bestehend aus der Rakete und dem Treibstoff betrachten, gilt der Impulserhaltungssatz:

$$p_\mathrm{i} = p_\mathrm{f}$$
$$M \cdot v = -\mathrm{d}M \cdot u + (M + \mathrm{d}M) \cdot (v + \mathrm{d}v)$$

Wir betrachten die Relativgeschwindigkeit der Rakete zum Treibstoff:

$$v_\mathrm{rel} = (v + \mathrm{d}v) - u \quad \Rightarrow \quad u = v + \mathrm{d}v - v_\mathrm{rel}$$

Einsetzen von u:

$$M \cdot v = -\mathrm{d}M \cdot (v + \mathrm{d}v - v_\mathrm{rel}) + (M + \mathrm{d}M) \cdot (v + \mathrm{d}v)$$
$$M \cdot v = -\mathrm{d}M \cdot v - \mathrm{d}M \cdot \mathrm{d}v + \mathrm{d}M \cdot v_\mathrm{rel} + M \cdot v + \mathrm{d}M \cdot v + M \cdot \mathrm{d}v + \mathrm{d}M \cdot \mathrm{d}v$$

Gleiche Terme heben sich auf:

$$-\mathrm{d}M \cdot v_\mathrm{rel} = M \cdot \mathrm{d}v \qquad | : \mathrm{d}t$$
$$-\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} \cdot v_\mathrm{rel} = M \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

Die Rate, mit der die Rakete Treibstoff (Masse) verliert ($\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}$), setzt man gleich $-R$. R ist die Rate des Verbrauchs.

$$R \cdot v_\mathrm{rel} = M \cdot a$$

die erste Raketengleichung

28.2 Berechnung der Geschwindigkeit der Rakete

$$-\mathrm{d}M \cdot v_{\mathrm{rel}} = M \cdot \mathrm{d}v \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}v = -v_{\mathrm{rel}} \cdot \frac{\mathrm{d}M}{M}$$

$$\int_{v_{\mathrm{i}}}^{v_{\mathrm{f}}} \mathrm{d}v = \int_{M_{\mathrm{i}}}^{M_{\mathrm{f}}} -v_{\mathrm{rel}} \cdot \frac{\mathrm{d}M}{M} = -v_{\mathrm{rel}} \cdot \int_{M_{\mathrm{i}}}^{M_{\mathrm{f}}} \frac{1}{M}\,\mathrm{d}M$$

(v_{rel} ist unabhängig von M.)

$$\begin{aligned} v_{\mathrm{f}} - v_{\mathrm{i}} &= -v_{\mathrm{rel}} \cdot [\ln(M_{\mathrm{f}}) - \ln(M_{\mathrm{i}})] \\ v_{\mathrm{f}} - v_{\mathrm{i}} &= -v_{\mathrm{rel}} \cdot \ln\left(\frac{M_{\mathrm{f}}}{M_{\mathrm{i}}}\right) \\ &= v_{\mathrm{rel}} \cdot \ln\left(\frac{M_{\mathrm{i}}}{M_{\mathrm{f}}}\right) \end{aligned}$$

$$v_{\mathrm{f}} - v_{\mathrm{i}} = v_{\mathrm{rel}} \cdot \ln\left(\frac{M_{\mathrm{i}}}{M_{\mathrm{f}}}\right)$$

zweite Raketengleichung

28.3 Übung

Aufgabe

Eine Rakete mit einer anfänglichen Masse $M_{\mathrm{i}} = 850\,\mathrm{kg}$ verbraucht Treibstoff mit einer Rate von $2{,}3\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}$. Die Geschwindigkeit der Verbrennungsprodukte relativ zum Triebwerk beträgt $2800\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Berechnen Sie:

a) die Anfangsbeschleunigung a der Rakete.

b) die Schubkraft der Rakete $(M \cdot a)$.

c) Die Masse M_{f}, nachdem der gesamte Treibstoff verbrannt ist, beträgt 180 kg. Berechnen Sie die Geschwindigkeit v_{f}, wenn die Rakete aus der Ruhe startet.

Lösung zur Aufgabe

geg.: $M_{\mathrm{i}} = 850\,\mathrm{kg}$, $R = 2{,}3\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}$, $v_{\mathrm{rel}} = 2800\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $M_{\mathrm{f}} = 180\,\mathrm{kg}$, $v_{\mathrm{i}} = 0$

ges.: a, F_{Schub}, v_{f}

Lös.:

Zu a): Aus der ersten Raketengleichung folgt:

$$R \cdot v_{\mathrm{rel}} = M \cdot a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{R \cdot v_{\mathrm{rel}}}{M_{\mathrm{i}}} = \frac{2{,}3\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}} \cdot 2800\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{850\,\mathrm{kg}} = 7{,}6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Zu b):

$$F_{\mathrm{Schub}} = M \cdot a = R \cdot v_{\mathrm{rel}} = 2{,}3\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}} \cdot 2800\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 6440\,\mathrm{N} = 6{,}44\,\mathrm{kN}$$

Zu c): Aus der zweiten Raketengleichung folgt mit $v_{\mathrm{i}} = 0$:

$$v_{\mathrm{f}} = v_{\mathrm{rel}} \cdot \ln\left(\frac{M_{\mathrm{i}}}{M_{\mathrm{f}}}\right) = 2800\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \ln\left(\frac{850\,\mathrm{kg}}{180\,\mathrm{kg}}\right) = 4350\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 4{,}35\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

Größe	Ergebnis
a	7,6 m/s²
F_{Schub}	6,44 kN
v_{f}	4350 m/s

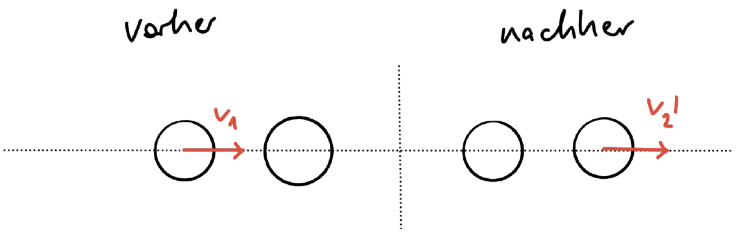
29 Stoßvorgänge

29.1 Was ist ein Stoßvorgang / ein Stoß?

→ Ein Stoß tritt dann auf, wenn zwei (oder mehr) Körper aufeinandertreffen und dabei mit einer Kraft wechselwirken.

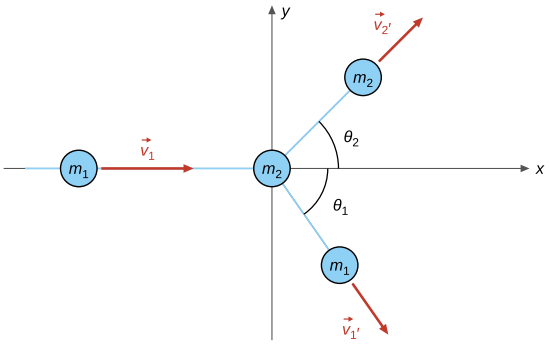
Zentraler Stoß

→ Der Stoß erfolgt eindimensional.



Schiefer Stoß

→ Der Stoß erfolgt nicht eindimensional.



29.2 Arten des zentralen Stoßes

Der elastische zentrale Stoß

- Spezialfall des zentralen Stoßes
- Kinetische Energie bleibt erhalten: $E_{\text{kin}} = E'_{\text{kin}}$ (E'_{kin}: „E kin Strich“)
- Der Impuls bleibt erhalten: $p_{\text{ges}} = p'_{\text{ges}}$

Der vollkommen unelastische zentrale Stoß

- Spezialfall des zentralen Stoßes
- Nach dem Stoß bewegen sich die Körper als ein Körper mit einer Gesamtmasse weiter.
- Die kinetische Energie ist nicht erhalten: $E_{\text{kin}} = E'_{\text{kin}} + W_{\text{V}}$ (W_{V} – Verformungsarbeit)
- Der Impuls bleibt erhalten.

Der unelastische zentrale Stoß

- alle anderen Fälle

→ E_{kin} ist nicht erhalten.

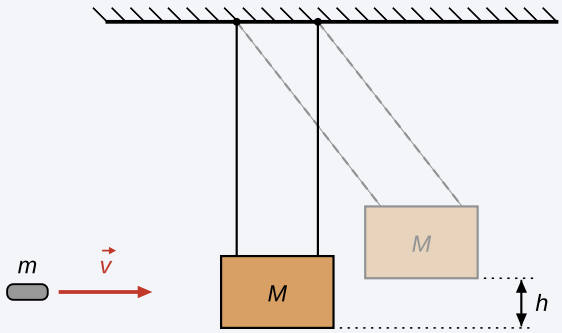
→ Die Körper bewegen sich nicht als ein Körper weiter.

- Der Impuls bleibt erhalten.

29.3 Beispielaufgabe zum vollkommen unelastischen Stoß

Beispielaufgabe

Das ballistische Pendel wurde früher verwendet, um die Geschwindigkeit von Geschossen zu messen. Ein Holzklotz mit der Masse $M = 3{,}2\,\mathrm{kg}$ hängt an zwei langen Schnüren. Ein Geschoss mit der Masse $m = 12\,\mathrm{g}$ wird waagerecht in den Klotz geschossen und bleibt darin stecken. Klotz und Geschoss schwingen danach nach oben, wobei sich ihr gemeinsamer Schwerpunkt um die Höhe $h = 8{,}5\,\mathrm{cm}$ hebt, bevor das Pendel am oberen Punkt der Bahn kurzzeitig ruht.



Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Geschosses unmittelbar vor dem Aufprall.

geg.: $M = 3{,}2\,\mathrm{kg}$, $m = 12\,\mathrm{g} = 0{,}012\,\mathrm{kg}$, $\Delta h = 8{,}5\,\mathrm{cm} = 0{,}085\,\mathrm{m}$

ges.: v

Lös.:

Ansatz:

- vollkommen unelastischer Stoß ①
- Impulserhaltungssatz ②

Zu ② und ①: Der Impuls vor dem Stoß ist gleich dem Impuls nach dem Stoß. Nach dem Stoß bewegen sich beide Körper gemeinsam mit der Geschwindigkeit v':

$$m \cdot v = (m + M) \cdot v'$$

Nach dem Stoß bleibt die mechanische Energie erhalten:

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{kin}} &= E_{\mathrm{pot}} \\ \frac{m+M}{2} \cdot v'^2 &= (m+M) \cdot g \cdot \Delta h \qquad | \cdot \frac{2}{m+M} \\ v'^2 &= 2 \cdot g \cdot \Delta h \\ v' &= \sqrt{2 \cdot g \cdot \Delta h} \end{aligned}$$

Einsetzen in ①:

$$m \cdot v = (m + M) \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot \Delta h}$$

$$v = \frac{m+M}{m} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot \Delta h} = \frac{0{,}012\,\mathrm{kg} + 3{,}2\,\mathrm{kg}}{0{,}012\,\mathrm{kg}} \cdot \sqrt{2 \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 0{,}085\,\mathrm{m}} = 346\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

29.4 Übungsaufgaben Stoßvorgänge

Übungsaufgabe 1

Ein Körper mit der Masse 3,0 kg stößt mit $5{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ frontal auf einen zweiten Körper mit der Masse 6,0 kg, der ihm mit $4{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ entgegenkommt. Der schwerere Körper kommt durch den Stoß zum Stillstand.

a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit des 3,0 kg schweren Körpers nach dem Stoß.

b) Entscheiden Sie durch eine Rechnung, ob der Stoß elastisch ist.

Lösung zu Übungsaufgabe 1

geg.: $m_1 = 3{,}0\,\mathrm{kg}$, $m_2 = 6{,}0\,\mathrm{kg}$, $v_1 = 5{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $v_2 = -\,4{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ (er kommt ihm entgegen), $v_2' = 0$

ges.: v_1', ΔE_{kin}

Lös.:

Zu a) Impulserhaltung:

$$\begin{aligned} m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 &= m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2' \qquad (v'_2 = 0) \\ m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 &= m_1 \cdot v_1' \end{aligned}$$

$$v_1' = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1} = \frac{3{,}0\,\mathrm{kg} \cdot 5{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 6{,}0\,\mathrm{kg} \cdot 4{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{3{,}0\,\mathrm{kg}} = -\,3{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Der leichtere Körper bewegt sich nach dem Stoß mit $3{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ in die entgegengesetzte Richtung.

Zu b):

$$\Delta E_{\mathrm{kin}} = \frac{m_1}{2} \cdot (v'_1)^2 - \left(\frac{m_1}{2} \cdot v_1^2 + \frac{m_2}{2} \cdot v_2^2 \right) = 13{,}5\,\mathrm{J} - 85{,}5\,\mathrm{J} = -72\,\mathrm{J}$$

→ Die kinetische Energie bleibt nicht erhalten. Es ist kein elastischer Stoß.

Größe	Ergebnis
v_1'	−3,0 m/s
ΔE_{kin}	−72 J, kein elastischer Stoß

Übungsaufgabe 2

Bei einem elastischen Stoß trifft ein Neutron der Masse m_{N} zentral auf einen ruhenden Heliumkern der Masse $4 \cdot m_{\mathrm{N}}$. Die Geschwindigkeit des Neutrons beträgt $500\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Berechnen Sie die Geschwindigkeiten des Neutrons und des Heliumkerns nach dem Stoß.

Lösung zu Übungsaufgabe 2

geg.: $m_{\mathrm{He}} = 4 \cdot m_{\mathrm{N}}$, $v_{\mathrm{N}} = 500\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $v_{\mathrm{He}} = 0$

ges.: v_{N}', v_{He}'

Lös.: Elastischer Stoß → kinetische Energie und Impuls sind erhalten.

Impuls:

$$\begin{aligned} m_{\mathrm{N}} \cdot v_{\mathrm{N}} &= m_{\mathrm{N}} \cdot v_{\mathrm{N}}' + m_{\mathrm{He}} \cdot v_{\mathrm{He}}' \\ m_{\mathrm{N}} \cdot v_{\mathrm{N}} &= m_{\mathrm{N}} \cdot v_{\mathrm{N}}' + 4 \cdot m_{\mathrm{N}} \cdot v_{\mathrm{He}}' \qquad | : m_{\mathrm{N}} \\ v_{\mathrm{N}} &= v_{\mathrm{N}}' + 4 \cdot v_{\mathrm{He}}' \end{aligned}$$

$$v_{\mathrm{N}}' = v_{\mathrm{N}} - 4 \cdot v_{\mathrm{He}}'$$

Kinetische Energie:

$$\frac{m_\mathrm{N}}{2} \cdot v_\mathrm{N}^2 = \frac{m_\mathrm{N}}{2} \cdot {v'}_\mathrm{N}^2 + \frac{4 \cdot m_\mathrm{N}}{2} \cdot {v'}_\mathrm{He}^2 \qquad | \cdot \frac{2}{m_\mathrm{N}}$$

$$v_\mathrm{N}^2 = {v'}_\mathrm{N}^2 + 4 \cdot {v'}_\mathrm{He}^2$$

Einsetzen von $v'_\mathrm{N} = v_\mathrm{N} - 4 \cdot v'_\mathrm{He}$:

$$v_\mathrm{N}^2 = (v_\mathrm{N} - 4 \cdot {v'}_\mathrm{He})^2 + 4 \cdot {v'}_\mathrm{He}^2$$

$$v_\mathrm{N}^2 = v_\mathrm{N}^2 - 8 \cdot v_\mathrm{N} \cdot v'_\mathrm{He} + 16 \cdot {v'}_\mathrm{He}^2 + 4 \cdot {v'}_\mathrm{He}^2$$

$$0 = 20 \cdot {v'}_\mathrm{He}^2 - 8 \cdot v_\mathrm{N} \cdot v'_\mathrm{He} \qquad | : v'_\mathrm{He} \quad ({v'}_\mathrm{He} \neq 0)$$

$$0 = 20 \cdot v'_\mathrm{He} - 8 \cdot v_\mathrm{N}$$

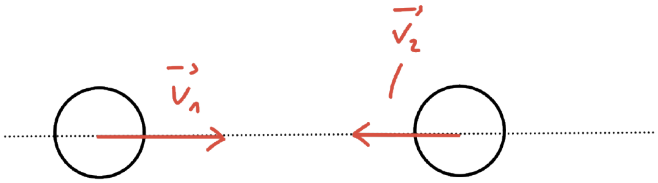
$$v'_\mathrm{He} = \frac{8}{20} \cdot v_\mathrm{N} = 200\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$v'_\mathrm{N} = v_\mathrm{N} - 4 \cdot v'_\mathrm{He} = 500\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 4 \cdot 200\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = -300\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Das Neutron bewegt sich nach dem Stoß in die entgegengesetzte Richtung.

Größe	Ergebnis
v'_He	200 m/s
v'_N	−300 m/s

30 Der zentrale elastische Stoß



Beim elastischen Stoß gilt der Impulserhaltungssatz (1) und der Energieerhaltungssatz für die kinetische Energie (2).

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2' \qquad (1)$$

$$\frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2 = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot {v_1'}^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot {v_2'}^2 \qquad (2)$$

Um dieses Gleichungssystem aufzulösen, formen wir (1) um:

$$\begin{aligned} m_1 \cdot v_1 - m_1 \cdot v_1' &= m_2 \cdot v_2' - m_2 \cdot v_2 \\ m_1 \cdot (v_1 - {v'}_1) &= m_2 \cdot ({v'}_2 - v_2) \\ m_1 \cdot (v_1 - {v'}_1) &= -m_2 \cdot (v_2 - {v'}_2) \qquad (3) \end{aligned}$$

Nach dem gleichen Prinzip wird (2) umgeformt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 - \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot {v_1'}^2 &= \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot {v_2'}^2 - \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2 \qquad | \cdot 2 \\ m_1 \cdot v_1^2 - m_1 \cdot {v_1'}^2 &= m_2 \cdot {v_2'}^2 - m_2 \cdot v_2^2 \\ m_1 \cdot (v_1^2 - {v'}_1^2) &= -m_2 \cdot (v_2^2 - {v'}_2^2) \\ m_1 \cdot (v_1 + {v'}_1) \cdot (v_1 - {v'}_1) &= -m_2 \cdot (v_2 + {v'}_2) \cdot (v_2 - {v'}_2) \qquad (4) \end{aligned}$$

Wir teilen (4) durch (3):

$$\frac{m_1 \cdot (v_1 + {v'}_1) \cdot (v_1 - {v'}_1)}{m_1 \cdot (v_1 - {v'}_1)} = \frac{-m_2 \cdot (v_2 + {v'}_2) \cdot (v_2 - {v'}_2)}{-m_2 \cdot (v_2 - {v'}_2)}$$

$$v_1 + v_1' = v_2 + v_2'$$

$\rightarrow v_1' = v_2 + v_2' - v_1$

Einsetzen in (1) und Auflösen nach v_2':

$$\begin{aligned} m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 &= m_1 \cdot (v_2 + {v'}_2 - v_1) + m_2 \cdot v_2' \\ 2 \cdot m_1 \cdot v_1 + (m_2 - m_1) \cdot v_2 &= (m_1 + m_2) \cdot v_2' \end{aligned}$$

$$v_2' = \frac{2 \cdot m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \cdot v_2$$

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_1 + \frac{2 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_2$$

Klausurvorbereitung 2

Themen:

- gleichförmige Kreisbewegung
- Arbeit und Energie
- Leistung und Wirkungsgrad
- Impuls und Kraftstoß
- Stoßvorgänge

Winkelgrößen der Kreisbewegung

Winkelgrößen	Bahngrößen
$\varphi(t)$	$s(t)$
$\dot{\varphi}(t) = \omega(t)$	$\dot{s}(t) = v(t)$
$\ddot{\varphi}(t) = \alpha(t)$	$\ddot{s}(t) = a(t)$
$\varphi(T) = 2 \cdot \pi$	$s(T) = 2 \cdot \pi \cdot r = \varphi(T) \cdot r$

Aufgaben zur Kreisbewegung

Aufgabe 1

Nehmen Sie Stellung zu folgender Aussage:

„Bei der gleichförmigen Kreisbewegung ist die kinetische Energie $\frac{m}{2} \cdot v^2$ konstant, deshalb ist keine externe Kraft nötig.“

Lösung zu Aufgabe 1

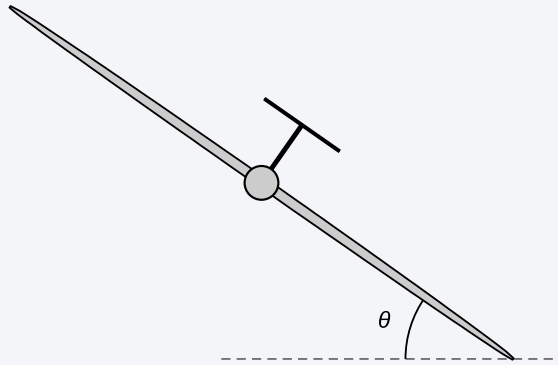
Der erste Teil der Aussage ist richtig: Der Betrag der Bahngeschwindigkeit ist konstant, deshalb ist auch die kinetische Energie konstant.

Die Folgerung ist falsch. Die Richtung der Geschwindigkeit ändert sich ständig, der Körper wird also beschleunigt (Zentripetalbeschleunigung). Nach dem Trägheitsprinzip würde er sich ohne resultierende Kraft geradlinig gleichförmig bewegen. Für die Kreisbahn ist deshalb eine Kraft nötig, die zum Mittelpunkt zeigt: die Zentripetalkraft.

Beides passt zusammen: Die Zentripetalkraft steht immer senkrecht zur Bewegungsrichtung. Sie verrichtet deshalb keine Arbeit und ändert die kinetische Energie nicht.

Aufgabe 2

Ein Segelflugzeug fliegt mit einer Geschwindigkeit von $90\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ auf einem horizontalen Kreis. Seine Tragflächen sind dabei um den Winkel $\theta = 35^\circ$ zur Horizontalen geneigt. Die erforderliche Kraft wird vollständig durch den aerodynamischen Auftrieb bereitgestellt, der senkrecht zur Tragfläche steht.



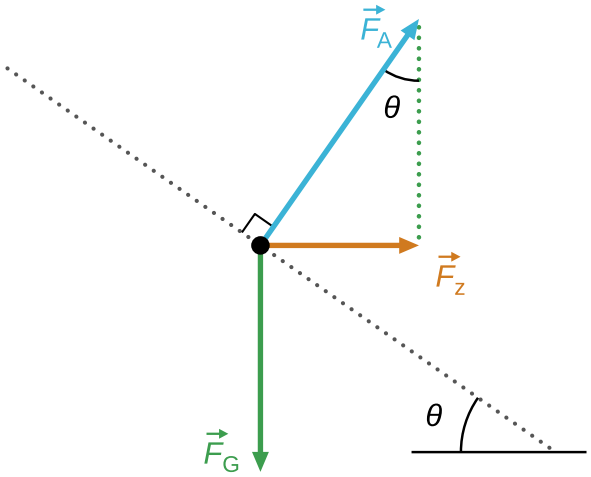
Berechnen Sie den Radius des Kreises, auf dem das Flugzeug fliegt.

Lösung zu Aufgabe 2

geg.: $v = 90\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 25\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $\theta = 35^\circ$

ges.: r

Lös.:



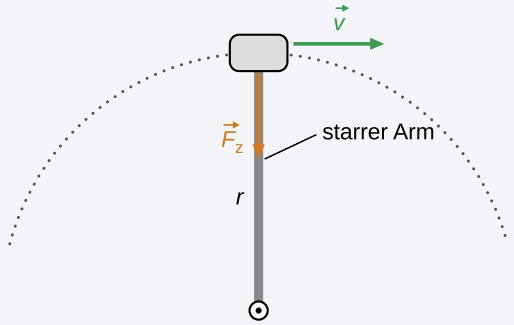
$$F_\mathrm{G} = m \cdot g \qquad F_\mathrm{z} = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{F_\mathrm{z}}{F_\mathrm{G}} = \frac{m \cdot \frac{v^2}{r}}{m \cdot g} = \frac{v^2}{r \cdot g}$$

$$r = \frac{v^2}{\tan\theta \cdot g} = \frac{\left(25\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{\tan(35^\circ) \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 91\,\mathrm{m}$$

Aufgabe 3

Ein Fahrgeschäft besteht aus einer Gondel, die sich am Ende eines starren Arms auf einem vertikalen Kreis bewegt. Die Masse des Arms ist vernachlässigbar. Die Gewichtskraft der Gondel mit den Fahrgästen beträgt 8,0 kN, und der Radius des Kreises beträgt 12 m.



Betrachten Sie den höchsten Punkt des Kreises. Bestimmen Sie für die Geschwindigkeit $v = 6{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

a) den Betrag der Kraft F_B, die der Arm auf die Gondel ausübt,

b) die Richtung dieser Kraft (nach oben oder nach unten).

Bestimmen Sie c) den Betrag und d) die Richtung der Kraft für $v = 14\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Lösung zu Aufgabe 3

geg.: $F_\mathrm{G} = 8{,}0\,\mathrm{kN}$, $r = 12\,\mathrm{m}$, $v = 6{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ bzw. $v = 14\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

ges.: F_B (Betrag und Richtung)

Lös.: Die positive Richtung zeigt nach unten (zum Mittelpunkt).

$$\vec{F}_\mathrm{z} = \vec{F}_\mathrm{B} + \vec{F}_\mathrm{G} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_\mathrm{B} = \vec{F}_\mathrm{z} - \vec{F}_\mathrm{G}$$

$$F_\mathrm{B} = \frac{m \cdot v^2}{r} - F_\mathrm{G}$$

Mit $F_\mathrm{G} = m \cdot g$, also $m = \dfrac{F_\mathrm{G}}{g}$:

$$F_\mathrm{B} = \frac{F_\mathrm{G}}{g} \cdot \frac{v^2}{r} - F_\mathrm{G} = F_\mathrm{G} \cdot \left(\frac{v^2}{r \cdot g} - 1 \right)$$

Zu a) und b):

$$F_\mathrm{B}\left(6{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right) = 8{,}0\,\mathrm{kN} \cdot \left(\frac{\left(6{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{12\,\mathrm{m} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} - 1 \right) = -\,5{,}6\,\mathrm{kN}$$

→ Die Kraft ist entgegengesetzt zu $\vec{F}_\mathrm{G}$ gerichtet ⇒ nach oben. Der Arm stützt die Gondel.

Zu c) und d):

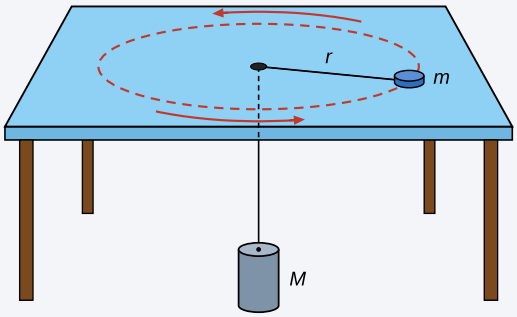
$$F_\mathrm{B}\left(14\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right) = 8{,}0\,\mathrm{kN} \cdot \left(\frac{\left(14\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{12\,\mathrm{m} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} - 1 \right) = 5{,}3\,\mathrm{kN}$$

→ Die Kraft zeigt in Richtung von $\vec{F}_\mathrm{G}$ ⇒ nach unten. Der Arm zieht die Gondel zum Mittelpunkt.

Geschwindigkeit	Betrag von F_B	Richtung
6,0 m/s	5,6 kN	nach oben
14 m/s	5,3 kN	nach unten

Aufgabe 4

Ein Puck mit der Masse $m = 0{,}80\,\mathrm{kg}$ gleitet auf einem reibungsfreien Tisch auf einem Kreis mit dem Radius $r = 25{,}0\,\mathrm{cm}$. Er ist durch eine Schnur, die durch ein Loch im Tisch führt, mit einem hängenden Zylinder der Masse $M = 1{,}20\,\mathrm{kg}$ verbunden.



Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Pucks, bei der der Zylinder in Ruhe bleibt.

Lösung zu Aufgabe 4

geg.: $m = 0{,}80\,\mathrm{kg}$, $r = 0{,}250\,\mathrm{m}$, $M = 1{,}20\,\mathrm{kg}$

ges.: v

Lös.: Der Zylinder bleibt in Ruhe, wenn die Zugkraft in der Schnur seine Gewichtskraft ausgleicht. Dieselbe Zugkraft ist die Zentripetalkraft für den Puck:

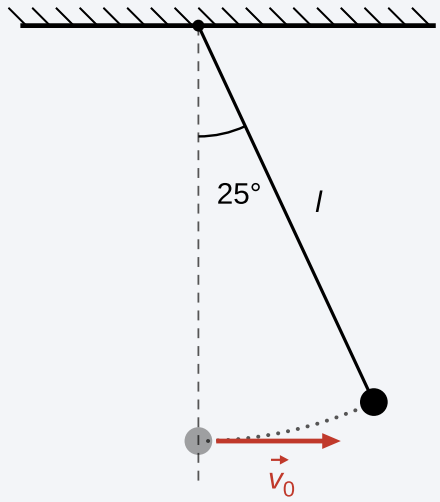
$$\begin{aligned} F_\mathrm{z} &= F_\mathrm{G} \\ m \cdot \frac{v^2}{r} &= M \cdot g \qquad \left| \cdot \frac{r}{m} \right. \\ v^2 &= \frac{M}{m} \cdot g \cdot r \end{aligned}$$

$$v = \sqrt{\frac{M}{m} \cdot g \cdot r} = \sqrt{\frac{1{,}20\,\mathrm{kg}}{0{,}80\,\mathrm{kg}} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 0{,}250\,\mathrm{m}} = 1{,}92\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Aufgaben zu Arbeit und Energie

Aufgabe 5

Ein Pendel besteht aus einem Pendelkörper mit der Masse 1,5 kg, der an einer leichten, 2,0 m langen Schnur befestigt ist. Der ruhend an der senkrechten Schnur hängende Pendelkörper wird kurzzeitig horizontal so angestoßen, dass er eine horizontale Geschwindigkeit von $3{,}6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ erhält. Betrachten Sie den Moment, in dem die Schnur einen Winkel von 25° zur Vertikalen bildet.



Berechnen Sie für diesen Moment

a) den Geschwindigkeitsbetrag,

b) die potenzielle Energie des Pendelkörpers (in Bezug auf seinen tiefsten Punkt),

c) die Zugkraft in der Schnur.

d) Berechnen Sie den Winkel zur Vertikalen, den die Schnur bildet, wenn der Pendelkörper seinen höchsten Punkt erreicht.

Lösung zu Aufgabe 5

geg.: $m = 1{,}5\,\mathrm{kg}$, $l = 2{,}0\,\mathrm{m}$, $v_0 = 3{,}6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $\theta = 25^\circ$

ges.: v, E_{pot}, F_{Z}, $\theta_{\max}$

Lös.:

Höhe über dem tiefsten Punkt:

$$\Delta h = l \cdot (1 - \cos\theta) = 2{,}0\,\mathrm{m} \cdot (1 - \cos(25^\circ)) = 0{,}187\,\mathrm{m}$$

Zu b):

$$E_{\mathrm{pot}} = m \cdot g \cdot \Delta h = 1{,}5\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 0{,}187\,\mathrm{m} = 2{,}8\,\mathrm{J}$$

Zu a) Energieerhaltungssatz:

$$\frac{m}{2} \cdot v_0^2 = \frac{m}{2} \cdot v^2 + m \cdot g \cdot \Delta h \qquad | \cdot \frac{2}{m}$$

$$v^2 = v_0^2 - 2 \cdot g \cdot \Delta h$$

$$v = \sqrt{\left(3{,}6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 - 2 \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 0{,}187\,\mathrm{m}} = 3{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Zu c): Entlang der Schnur gilt (positive Richtung zum Aufhängepunkt):

$$F_{\mathrm{z}} = F_{\mathrm{Z}} - m \cdot g \cdot \cos\theta \quad \Rightarrow \quad F_{\mathrm{Z}} = m \cdot \frac{v^2}{l} + m \cdot g \cdot \cos\theta$$

$$F_{\mathrm{Z}} = 1{,}5\,\mathrm{kg} \cdot \frac{9{,}28\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}}{2{,}0\,\mathrm{m}} + 1{,}5\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \cos(25^\circ) = 7{,}0\,\mathrm{N} + 13{,}3\,\mathrm{N} = 20{,}3\,\mathrm{N}$$

Zu d): Im höchsten Punkt ist die Geschwindigkeit null:

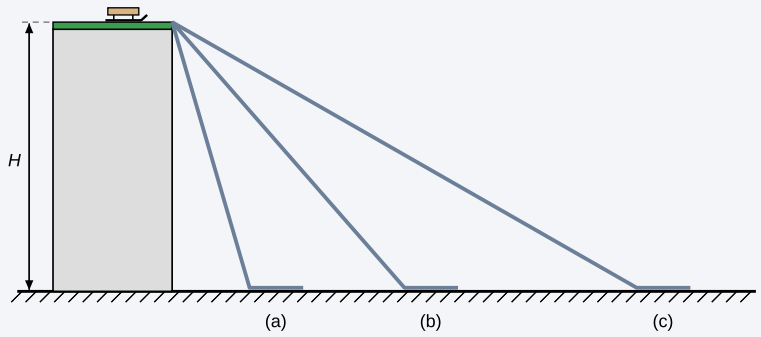
$$\frac{m}{2} \cdot v_0^2 = m \cdot g \cdot l \cdot (1 - \cos\theta_{\max}) \quad \Rightarrow \quad \cos\theta_{\max} = 1 - \frac{v_0^2}{2 \cdot g \cdot l}$$

$$\theta_{\max} = \arccos\left(1 - \frac{\left(3{,}6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{2 \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 2{,}0\,\mathrm{m}}\right) = 48^\circ$$

Größe	Ergebnis
v	3,0 m/s
E_{pot}	2,8 J
F_{Z}	20,3 N
$\theta_{\max}$	48°

Aufgabe 6

Ein Schlitten kann von einem Podest über eine von drei reibungsfreien Rutschen zum Boden hinunterrutschen.



Ordnen Sie die Rutschen danach, wie viel Arbeit die Gewichtskraft während des Hinabrutschens am Schlitten verrichtet. Beginnen Sie mit der größten.

Lösung zu Aufgabe 6

Alle sind gleich.

Die Arbeit der Gewichtskraft hängt nur vom Höhenunterschied ab, nicht vom Weg: $W = m \cdot g \cdot \Delta h$. Alle drei Rutschen beginnen in derselben Höhe und enden am Boden.

Aufgabe 7

Ein Junge mit der Masse 30 kg gleitet eine 2,5 m hohe Rutsche auf einem Spielplatz hinunter. Unten angekommen, ist er $2{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ schnell.

a) Berechnen Sie, wie viel Energie durch Reibung in Wärme umgewandelt worden ist.

b) Berechnen Sie den Gleitreibungskoeffizienten zwischen der Kleidung des Jungen und der Rutsche, wenn diese um 25° gegen die Horizontale geneigt ist.

Lösung zu Aufgabe 7

geg.: $m = 30\,\mathrm{kg}$, $h = 2{,}5\,\mathrm{m}$, $v = 2{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $\alpha = 25^\circ$

ges.: $|W_\mathrm{R}|$, μ_GR

Lös.:

Zu a):

$$|W_\mathrm{R}| = E_\mathrm{pot} - E_\mathrm{kin} = m \cdot g \cdot h - \frac{m}{2} \cdot v^2$$

$$|W_\mathrm{R}| = 30\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 2{,}5\,\mathrm{m} - \frac{30\,\mathrm{kg}}{2} \cdot \left(2{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 = 736\,\mathrm{J} - 60\,\mathrm{J} = 676\,\mathrm{J}$$

Zu b): Länge der Rutsche und Reibungskraft:

$$s = \frac{h}{\sin\alpha} \qquad F_\mathrm{GR} = \mu_\mathrm{GR} \cdot F_\mathrm{N} = \mu_\mathrm{GR} \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha$$

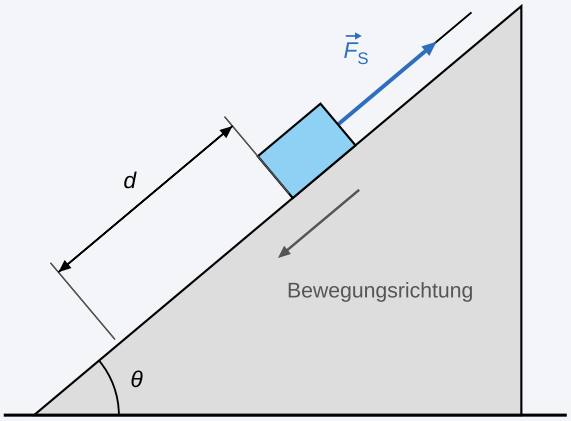
$$|W_\mathrm{R}| = F_\mathrm{GR} \cdot s = \mu_\mathrm{GR} \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha \cdot \frac{h}{\sin\alpha} = \mu_\mathrm{GR} \cdot \frac{m \cdot g \cdot h}{\tan\alpha}$$

$$\mu_\mathrm{GR} = \frac{|W_\mathrm{R}| \cdot \tan\alpha}{m \cdot g \cdot h} = \frac{676\,\mathrm{J} \cdot \tan(25^\circ)}{736\,\mathrm{J}} = 0{,}43$$

Größe	Ergebnis
umgewandelte Energie	676 J
μ_GR	0,43

Aufgabe 8

Eine Kiste gleitet eine reibungsfreie Rampe mit dem Neigungswinkel $\theta = 40°$ hinunter. Ein Arbeiter bremst die Kiste über ein Seil mit der Kraft $\vec{F}_S$. Diese Kraft hat den Betrag 30 N und ist entlang der Rampe nach oben gerichtet. Während die Kiste die Strecke $d = 0{,}80\,\mathrm{m}$ entlang der Rampe zurücklegt, nimmt ihre kinetische Energie um 50 J zu.



Berechnen Sie, um wie viel größer die Zunahme der kinetischen Energie wäre, wenn das Seil nicht an der Kiste befestigt wäre.

Lösung zu Aufgabe 8

geg.: $F_S = 30\,\mathrm{N}$, $d = 0{,}80\,\mathrm{m}$, $\Delta E_{kin} = 50\,\mathrm{J}$

ges.: Unterschied der kinetischen Energie ohne Seil

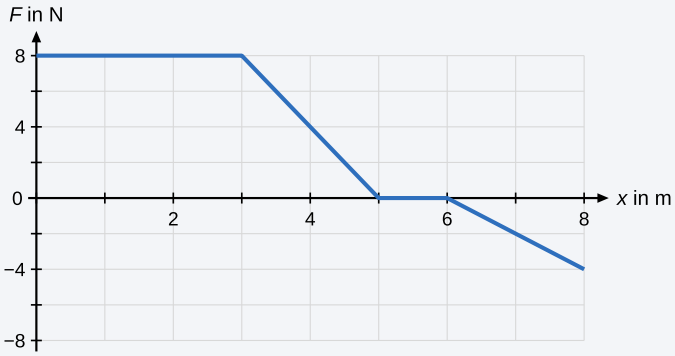
Lös.: Die Seilkraft wirkt entgegen der Bewegungsrichtung. Sie verrichtet an der Kiste die negative Arbeit

$$W_S = -F_S \cdot d = -30\,\mathrm{N} \cdot 0{,}80\,\mathrm{m} = -24\,\mathrm{J}$$

Ohne das Seil fehlt diese negative Arbeit. Die kinetische Energie wäre um 24 J größer (Zunahme um 74 J statt um 50 J).

Aufgabe 9

Ein Block mit der Masse 4,0 kg bewegt sich geradlinig auf einer waagerechten, reibungsfreien Fläche unter dem Einfluss einer Kraft, die sich mit dem Ort ändert. Das Diagramm zeigt die Kraft in Abhängigkeit vom Ort.



Bestimmen Sie die Arbeit, die die Kraft verrichtet, während sich der Block vom Ursprung bis $x = 8{,}0\,\mathrm{m}$ bewegt.

Lösung zu Aufgabe 9

geg.: F(x)-Diagramm

ges.: W von $x = 0$ bis $x = 8{,}0\,\mathrm{m}$

Lös.: Die Arbeit ist die Fläche unter der Kurve:

$$W = \int_0^{8\,\mathrm{m}} F(x)\,\mathrm{d}x$$

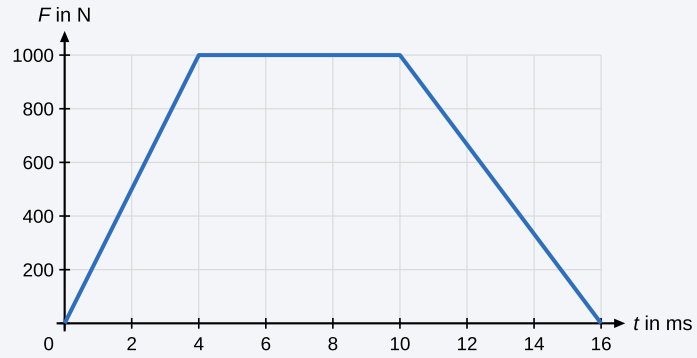
Abschnitt	Fläche	Arbeit
0 bis 3 m	Rechteck: $8\,\mathrm{N} \cdot 3\,\mathrm{m}$	24 J
3 m bis 5 m	Dreieck: $\frac{1}{2} \cdot 8\,\mathrm{N} \cdot 2\,\mathrm{m}$	8 J
5 m bis 6 m	keine Kraft	0
6 m bis 8 m	Dreieck unter der Achse: $\frac{1}{2} \cdot (-4\,\mathrm{N}) \cdot 2\,\mathrm{m}$	−4 J

$$W = 24\,\mathrm{J} + 8\,\mathrm{J} + 0 - 4\,\mathrm{J} = 28\,\mathrm{J}$$

Aufgaben zu Impuls und Stoßvorgängen

Aufgabe 10

Ein ruhender Fußball mit der Masse 0,43 kg wird geschossen. Das Diagramm zeigt die Kraft, die der Fuß auf den Ball ausübt, in Abhängigkeit von der Zeit.



a) Bestimmen Sie den Betrag des Kraftstoßes, den der Fuß auf den Ball ausübt.

b) Berechnen Sie die Geschwindigkeit, mit der der Ball den Fuß verlässt.

c) Berechnen Sie die mittlere Kraft, die während des Schusses auf den Ball wirkt.

Lösung zu Aufgabe 10

geg.: $m = 0{,}43\,\mathrm{kg}$, $v_\mathrm{i} = 0$, F(t)-Diagramm, $\Delta t = 16\,\mathrm{ms} = 0{,}016\,\mathrm{s}$

ges.: J, v_f, $\overline{F}$

Lös.:

Zu a): Der Kraftstoß ist die Fläche unter der Kurve:

$$J = \int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}} F(t)\,\mathrm{d}t$$

Abschnitt	Fläche	Kraftstoß
0 bis 4 ms	Dreieck: $\frac{1}{2} \cdot 1000\,\mathrm{N} \cdot 0{,}004\,\mathrm{s}$	2 N·s
4 ms bis 10 ms	Rechteck: $1000\,\mathrm{N} \cdot 0{,}006\,\mathrm{s}$	6 N·s
10 ms bis 16 ms	Dreieck: $\frac{1}{2} \cdot 1000\,\mathrm{N} \cdot 0{,}006\,\mathrm{s}$	3 N·s

$$J = 2\,\mathrm{N \cdot s} + 6\,\mathrm{N \cdot s} + 3\,\mathrm{N \cdot s} = 11\,\mathrm{N \cdot s}$$

Zu b): Der Kraftstoß ist gleich der Impulsänderung des Balls:

$$J = \Delta p = m \cdot v_\mathrm{f} - m \cdot v_\mathrm{i} = m \cdot v_\mathrm{f} \quad \Rightarrow \quad v_\mathrm{f} = \frac{J}{m} = \frac{11\,\mathrm{N \cdot s}}{0{,}43\,\mathrm{kg}} = 26\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Zu c): Die mittlere Kraft ist die konstante Kraft, die in derselben Zeitspanne denselben Kraftstoß ausübt:

$$J = \overline{F} \cdot \Delta t \quad \Rightarrow \quad \overline{F} = \frac{J}{\Delta t} = \frac{11\,\mathrm{N \cdot s}}{0{,}016\,\mathrm{s}} = 690\,\mathrm{N}$$

Größe	Ergebnis
J	11 N·s
v_f	26 m/s
$\overline{F}$	690 N

Aufgabe 11

Eine Eisläuferin mit der Masse 57 kg steht in Ruhe auf dem Eis. Sie fängt einen Medizinball mit der Masse 3,0 kg, der mit einer Geschwindigkeit von $8{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ waagerecht auf sie zufliegt. Die Reibung zwischen den Schlittschuhen und dem Eis ist vernachlässigbar.

a) Geben Sie an, um welche Art von Stoß es sich handelt.

b) Berechnen Sie die Geschwindigkeit der Eisläuferin, nachdem sie den Ball gefangen hat.

c) Berechnen Sie, wie viel kinetische Energie bei dem Stoß in andere Energieformen umgewandelt wird.

d) Berechnen Sie den Betrag des Kraftstoßes, den der Ball auf die Eisläuferin ausübt.

Lösung zu Aufgabe 11

geg.: $m_1 = 3{,}0\,\mathrm{kg}$ (Ball), $v_1 = 8{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $m_2 = 57\,\mathrm{kg}$ (Eisläuferin), $v_2 = 0$

ges.: Art des Stoßes, v', W_V, J

Lös.:

Zu a): Die Eisläuferin und der Ball bewegen sich nach dem Stoß als ein Körper weiter. Es ist ein vollkommen unelastischer zentraler Stoß.

Zu b): Impulserhaltungssatz:

$$p_\mathrm{ges} = p'_\mathrm{ges}$$
$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = (m_1 + m_2) \cdot v'$$

Mit $v_2 = 0$:

$$v' = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1 = \frac{3{,}0\,\mathrm{kg}}{3{,}0\,\mathrm{kg} + 57\,\mathrm{kg}} \cdot 8{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 0{,}40\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Zu c):

$$E_{\text{kin}} = E'_{\text{kin}} + W_{\text{V}} \quad \Rightarrow \quad W_{\text{V}} = \frac{m_1}{2} \cdot v_1^2 - \frac{m_1 + m_2}{2} \cdot {v'}^2$$

$$W_{\text{V}} = \frac{3{,}0\,\text{kg}}{2} \cdot \left(8{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - \frac{60\,\text{kg}}{2} \cdot \left(0{,}40\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = 96\,\text{J} - 4{,}8\,\text{J} = 91\,\text{J}$$

→ 95 % der kinetischen Energie werden umgewandelt.

Zu d): Der Kraftstoß auf die Eisläuferin ist gleich ihrer Impulsänderung:

$$J = \Delta p_2 = m_2 \cdot v' - m_2 \cdot v_2 = 57\,\text{kg} \cdot 0{,}40\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 23\,\text{N} \cdot \text{s}$$

Größe	Ergebnis
Art des Stoßes	vollkommen unelastisch
v'	0,40 m/s
W_{V}	91 J
J	23 N·s

Aufgabe 12

Auf einer Luftkissenbahn stoßen zwei Gleiter zentral und elastisch zusammen. Gleiter 1 hat die Masse 0,30 kg und bewegt sich mit $0{,}80\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ nach rechts. Gleiter 2 hat die Masse 0,50 kg und kommt ihm mit $0{,}40\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ entgegen.

a) Berechnen Sie die Geschwindigkeiten der beiden Gleiter nach dem Stoß und geben Sie die Bewegungsrichtungen an.

b) Zeigen Sie durch eine Rechnung, dass der Gesamtimpuls und die kinetische Energie bei diesem Stoß erhalten bleiben.

Lösung zu Aufgabe 12

geg.: $m_1 = 0{,}30\,\text{kg}$, $v_1 = 0{,}80\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, $m_2 = 0{,}50\,\text{kg}$, $v_2 = -\,0{,}40\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ (positive Richtung nach rechts)

ges.: v'_1, v'_2

Lös.:

Zu a): Für den zentralen elastischen Stoß gilt:

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_1 + \frac{2 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_2$$

$$v'_1 = \frac{0{,}30\,\text{kg} - 0{,}50\,\text{kg}}{0{,}80\,\text{kg}} \cdot 0{,}80\,\frac{\text{m}}{\text{s}} + \frac{2 \cdot 0{,}50\,\text{kg}}{0{,}80\,\text{kg}} \cdot \left(-\,0{,}40\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right) = -\,0{,}70\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v'_2 = \frac{2 \cdot m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \cdot v_2$$

$$v'_2 = \frac{2 \cdot 0{,}30\,\text{kg}}{0{,}80\,\text{kg}} \cdot 0{,}80\,\frac{\text{m}}{\text{s}} + \frac{0{,}50\,\text{kg} - 0{,}30\,\text{kg}}{0{,}80\,\text{kg}} \cdot \left(-\,0{,}40\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right) = 0{,}50\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

→ Gleiter 1 bewegt sich nach dem Stoß nach links, Gleiter 2 nach rechts. Beide kehren ihre Bewegungsrichtung um.

Zu b):

	vor dem Stoß	nach dem Stoß
Impuls von Gleiter 1	0,24 kg·m/s	−0,21 kg·m/s
Impuls von Gleiter 2	−0,20 kg·m/s	0,25 kg·m/s
Gesamtimpuls	**0,04 kg·m/s**	**0,04 kg·m/s**
kinetische Energie von Gleiter 1	0,096 J	0,0735 J
kinetische Energie von Gleiter 2	0,040 J	0,0625 J
gesamte kinetische Energie	**0,136 J**	**0,136 J**

→ $p_{\mathrm{ges}} = p'_{\mathrm{ges}}$ und $E_{\mathrm{kin}} = E'_{\mathrm{kin}}$